

El discurso
en el **aula**
y la **construcción**
del conocimiento
matemático

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Evelia Reséndiz Balderas



UAT



El discurso
en el **aula**
y la **construcción**
del **conocimiento**
matemático

Reséndiz Balderas, Evelia

El discurso en el aula y la construcción del conocimiento matemático /Evelia Reséndiz Balderas .—
Ciudad de México : Colofón ; Universidad Autónoma de Tamaulipas, 2019.
119 págs. ; 17 x 23 cm.

1. Ciencia – Estudio y enseñanza 2. Matemáticas – Estudio y enseñanza

LC: **LB1026 R47**

DEWEY: **371.3 R47**

Centro Universitario Victoria

Centro de Gestión del Conocimiento. Tercer Piso

Cd. Victoria, Tamaulipas, México. C.P. 87149

consejopublicacionesuat@outlook.com

D. R. © 2019 Universidad Autónoma de Tamaulipas

Matamoros SN, Zona Centro Ciudad Victoria, Tamaulipas C.P. 87000

Consejo de Publicaciones UAT

Tel. (52) 834 3181-800 • extensión: 2948 • *www.uat.edu.mx*

 **Fomento Editorial** Una edición del Departamento de Fomento Editorial
de la Universidad Autónoma de Tamaulipas

Edificio Administrativo, planta baja, CU Victoria

Ciudad Victoria, Tamaulipas, México

Libro aprobado por el Consejo de Publicaciones UAT

ISBN UAT: 978-607-8750-23-8

Colofón

Franz Hals núm. 130, Alfonso XIII

Delegación Álvaro Obregón C.P. 01460, Ciudad de México

www.colofonlibros.com • colofonedicionesacademicas@gmail.com

ISBN Colofón: 978-607-635-074-4

Publicación financiada con recurso PFCE 2020

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra incluido el diseño tipográfico y de portada, sea cual fuera el medio, electrónico o mecánico, sin el consentimiento del Consejo de Publicaciones UAT.

Impreso en México • *Printed in Mexico*

El tiraje consta de 400 ejemplares

Este libro fue dictaminado y aprobado por el Consejo de Publicaciones UAT mediante un especialista en la materia. Asimismo fue recibido por el Comité Interno de Selección de Obras de Colofón Ediciones Académicas para su valoración en la sesión del segundo semestre 2019, se sometió al sistema de dictaminación a “doble ciego” por especialistas en la materia, el resultado de ambos dictámenes fue positivo.

"PARA CREAR COSAS BUENAS
PRIMERO HAY QUE CREER
EN ELLAS"



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
TAMAULIPAS
— 1950-2020 —

El discurso en el aula y la construcción del conocimiento matemático

Evelia Reséndiz Balderas
Autora



UAT



Fomento
Editorial





Ing. José Andrés Suárez Fernández
PRESIDENTE

Dr. Julio Martínez Burnes
VICEPRESIDENTE

Dr. Héctor Manuel Cappello Y García
SECRETARIO TÉCNICO

C.P. Guillermo Mendoza Cavazos
VOCAL

Dra. Rosa Issel Acosta González
VOCAL

Lic. Víctor Hugo Guerra García
VOCAL

Consejo Editorial del Consejo de Publicaciones de la Universidad Autónoma de Tamaulipas

Dra. Lourdes Arizpe Slogher • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Amalio Blanco** • Universidad Autónoma de Madrid, España | **Dra. Rosalba Casas Guerrero** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Francisco Díaz Bretones** • Universidad de Granada, España | **Dr. Rolando Díaz Lowing** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Manuel Fernández Ríos** • Universidad Autónoma de Madrid, España | **Dr. Manuel Fernández Navarro** • Universidad Autónoma Metropolitana, México | **Dra. Juana Juárez Romero** • Universidad Autónoma Metropolitana, México | **Dr. Manuel Marín Sánchez** • Universidad de Sevilla, España | **Dr. Cervando Martínez** • University of Texas at San Antonio, E.U.A. | **Dr. Darío Páez** • Universidad del País Vasco, España | **Dra. María Cristina Puga Espinosa** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Luis Arturo Rivas Tovar** • Instituto Politécnico Nacional, México | **Dr. Aroldo Rodríguez** • University of California at Fresno, E.U.A. | **Dr. José Manuel Valenzuela Arce** • Colegio de la Frontera Norte, México | **Dra. Margarita Velázquez Gutiérrez** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. José Manuel Sabucedo Cameselle** • Universidad de Santiago de Compostela, España | **Dr. Alessandro Soares da Silva** • Universidad de São Paulo, Brasil | **Dr. Akexandre Dorna** • Universidad de CAEN, Francia | **Dr. Ismael Vidales Delgado** • Universidad Regiomontana, México | **Dr. José Francisco Zúñiga García** • Universidad de Granada, España | **Dr. Bernardo Jiménez** • Universidad de Guadalajara, México | **Dr. Juan Enrique Marcano Medina** • Universidad de Puerto Rico-Humacao | **Dra. Ursula Oswald** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Arq. Carlos Mario Yori** • Universidad Nacional de Colombia | **Arq. Walter Debenedetti** • Universidad de Patrimonio, Colonia, Uruguay | **Dr. Andrés Piqueras** • Universitat Jaume I, Valencia, España | **Dr. Yolanda Troyano Rodríguez** • Universidad de Sevilla, España | **Dra. María Lucero Guzmán Jiménez** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dra. Patricia González Aldea** • Universidad Carlos III de Madrid, España | **Dr. Marcelo Urra** • Revista Latinoamericana de Psicología Social | **Dr. Rubén Ardila** • Universidad Nacional de Colombia | **Dr. Jorge Gissi** • Pontificia Universidad Católica de Chile | **Dr. Julio F. Villegas** • Universidad Diego Portales, Chile | **Ángel Bonifaz Ezeta** • Universidad Nacional Autónoma de México

Índice

Presentación	9
Capítulo 1	13
Problemática en la enseñanza del cálculo y la importancia de la variación	
1. La problemática en la enseñanza del cálculo	13
2. La variación, centro de discusión	15
2.1. Oresme (1323-1382) y la latitud de las formas: la variación	16
2.2. El cálculo y el movimiento	18
3. La investigación	19
Capítulo 2	21
Estudios de interés particular	21
1. El Discurso	21
2. La importancia del discurso	25
3. Relación con el problema de investigación	26
Capítulo 3	29
Perspectivas teóricas: trasposición didáctica y situaciones didácticas	
1. Dos aproximaciones teóricas	29
2. Teoría de situaciones didácticas	30
2.1. Contrato didáctico	31
3. La teoría de la transposición didáctica	32
3.1. Fenómenos ligados con la actividad de enseñanza	34
Capítulo 4	39
Orientación Metodológica	
1. Introducción	39
2. La etnografía	40
2.1. Organización del trabajo de campo	42
3. Escenario de interés y participantes en el estudio	45
4. Fuentes de aportación de la información	46

Capítulo 5	49
La variación y las explicaciones didácticas de los profesores	
1. Las explicaciones en la clase de matemáticas	50
1.1. Las explicaciones didácticas de los profesores: la variación	52
1.1.1. Cuando emplean a la tabulación como variación numérica (explicación usando la tabulación)	53
1.1.2. Al momento de construir gráficas como la variación de un punto de referencia	65
1.1.3. En sus expresiones verbales con referencia a situaciones cotidianas	76
1.1.4. Mediante el empleo de parámetros como variables principales	77
1.1.5. En los casos en que las derivadas son vistas como co-variación o comparación a/b	81
2. La explicación y el contexto institucional	89
3. El papel del ejemplo en las explicaciones del profesor	95
4. Construcción compartida de las explicaciones con base en la interacción	98
Conclusiones generales	108
Bibliografía	115
Anexo	119

Presentación

Las problemáticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son tema de estudio por parte de diversas corrientes teóricas inmersas en la Matemática Educativa (didáctica de la matemática o educación de las matemáticas desde otras escuelas de conocimiento).

La Matemática Educativa en México, ha estado influenciada fuertemente por corrientes extranjeras del pensamiento. Sin ellas, habría sido imposible la evolución de esta disciplina en nuestro país. Pero es justamente desde corrientes latinoamericanas que nuevas visiones toman fuerza. Visiones que buscan integrar factores socioculturales característicos de nuestras sociedades con nuevas formas de abordaje de la comprensión y la difusión en las aulas. Cantoral, Montiel y Reyes (2014) evidencian el reconocimiento a nivel mundial de este hecho.

La etnomatemática, en Brasil, y la Socioepistemología, en México, dan pauta para las investigaciones más novedosas en la matemática educativa latinoamericana y por lo tanto también para gran parte de las innovaciones que se piensan en el aula dedicada a las matemáticas.

En este libro se pretende dar cuenta de la evolución que ha sufrido: *la teoría de las situaciones didácticas y la teoría de la trasposición didáctica*. Una propuesta de atención en el aula que surgió de los análisis realizados con algunas de las herramientas más importantes en nuestro campo disciplinar desde hace un par de décadas.

Es importante considerar también, que dado que el conocimiento matemático se ha constituido y vive socialmente en ámbitos escolares y no escolares (como el mercado, la industria, los laboratorios científicos y muchos otros espacios), su difusión dentro del sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y funcionamiento, a la vez que también se afectan las relaciones establecidas entre los estudiantes y el profesor (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014).

Para la teoría socioepistemológica, la cual respalda este libro, el problema educativo no es el de la constitución de los objetos abstractos, sino el de su significación compartida para el uso culturalmente situado. Por tanto, su objetivo no estará en modificar, reorganizar o reestructurar la enseñanza de conceptos y procedimientos algorítmicos de las matemáticas con el objetivo de lograr el aprendizaje, sino en poner en juego un conjunto de prácticas socialmente compartidas en el mundo de experiencias del aprendiz dentro y fuera del aula y a lo largo de todas las actividades de su vida diaria (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014). *La teoría socioepistemológica de la matemática educativa* (Cantoral, 2016), se ocupa específicamente del problema que

plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional. Esta perspectiva teórica no sólo se ha enfocado en lo que sucede en el aula, ha ido más allá, a analizar lo que sucede en otros contextos donde vive el conocimiento matemático en uso.

La *teoría de las situaciones didácticas* (Brousseau, 1986), ha tenido una influencia determinante en la didáctica e investigación en enseñanza de las matemáticas (la socioepistemología ha tomado algunos elementos de la teoría de situaciones didácticas). Ésta trata de modelar el conjunto de relaciones expresadas en el aula de clase entre docentes, alumnos y conocimiento. Una situación didáctica implica que los conocimientos de los alumnos son conformados por los hechos a los cuales se enfrentan y dominan progresivamente, en especial por los primeros, susceptibles de dar sentido a los conceptos y procedimientos que se les quiere enseñar.

Desde esta perspectiva, ha sido posible rescatar la importancia de las interacciones entre profesor, los alumnos y el conocimiento, pero desde una perspectiva dinámica en la que estas interacciones se dan a través del paso por situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización planeadas por el profesor para que los alumnos aprendan determinado saber.

Pero, ¿cuáles serían las características de las interacciones? Se precisa por tanto, no sólo analizar cómo los estudiantes construían conocimiento matemático a través de las interacciones, sino también indagar qué papel jugaba la interacción discursiva del profesor.

Estudiar estas interacciones desde la etnografía permitió a este trabajo (Reséndiz, 2006), analizar lo que sucede en el espacio áulico en donde el profesor explica, debate, socializa significados y comparte prácticas, algo más que una exposición magistral.

Es a través del análisis de la manera en que se introduce y desarrolla la noción de variación en el aula, el cual no es un tema en el currículo, sino una práctica que subyace al estudio del cálculo en una escuela de ingeniería, se da cuenta del fenómeno de envejecimiento en la fase de institucionalización. Este fenómeno da cuenta de cómo las interacciones entre alumnos y maestros regulan el envejecimiento de las situaciones de enseñanza, sin las cuales el profesor recurriría a la mera definición de un concepto.

La escuela de nuestros días es uno de los escenarios básicos para la socialización de las personas. Por ello, el proceso de aprendizaje no sólo es el resultado de las acciones de los alumnos, sino también de las acciones en un proyecto de enseñanza y de aprendizaje donde estudiantes y profesores colaboran interrogándose y escuchándose mutuamente, dentro de una actividad que tiene sentido para ellos. En suma, consiste en una manera de entender el proceso de

enseñanza-aprendizaje como uno que incorpora prácticas socioculturales o de cooperación social, no sólo como un proceso de transmisión de información entre emisor activo y un receptor cuya actividad consiste en seguir disciplinadamente las estrategias que alguien, por encima de él, ha impuesto por ser el experto (Huertas y Montero, 2001).

El discurso educativo como comunicación se origina y desarrolla en estrecha relación con el estudio de la interacción didáctica. Esta perspectiva se apoya en la noción de comunicación y en la consideración primordial del lenguaje en la comunicación humana. Es decir, el lenguaje se concibe como un vehículo de comunicación (Rebollo, 2001). Si se admite que la enseñanza es un espacio de comunicación, el discurso es el medio que transporta la mayoría de los aprendizajes generados en el salón de clase. Los aspectos del aula están poblados de diferentes lenguajes que unos emiten y otros intentan interpretar correctamente, desde un punto de vista ideal. Ello conforma ese espacio común para el entendimiento mutuo, para cierta negociación de conocimientos y para la formación de significados compartidos. En tal sentido, enseñar consiste fundamentalmente en comunicar (Edwards y Mercer, 1987), de ahí se sugiere analizar lo que se dice y cómo se describen las cosas en clase.

El estudio del discurso escolar permite afirmar que toda institución social es un sistema de comunicación, ya que determinadas características de las instituciones docentes hacen de la comunicación un elemento decisivo. Si se asume que la interacción verbal se hace posible por la comunicación, el lenguaje aparece como un aspecto fundamental en el proceso de construcción y asignación de significados. Es necesario asignarle el papel del lenguaje verbal y no verbal un lugar privilegiado en la construcción del conocimiento y en las diversas maneras en que los maestros crean contextos comunicativos en el aula, para apoyar a los estudiantes en la construcción conjunta de la comprensión de la matemática escolar (Reséndiz, 2006; Aparicio y Cantoral, 2006, Forero, 2008).

Para ello, se opta por fijar la atención en el papel que juega la explicación en la clase de matemáticas cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados con la noción de variación, ya que el discurso explicativo es el espacio donde se construyen e interpretan los significados, tomando en cuenta la interacción de naturaleza social que se realiza en la escuela. La construcción del conocimiento durante la interacción requiere del lenguaje usado socialmente, que en esta investigación se describirá como discurso.

La intención es comprender las pautas complejas de interacción que se suscitan para construir conocimiento entre profesores y alumnos (Reséndiz, 2010), algo necesario como punto de partida para cualquier propuesta que pretenda

mejorar la enseñanza del cálculo en su contexto real. Partiremos del presupuesto de que, aunque la práctica de enseñar es seguramente una de las más antiguas de la cultura humana, su estudio sistemático y comprensión, en el caso particular de la matemática, representa una de las áreas de más reciente desarrollo en la investigación educativa; por lo cual, se consideró pertinente realizar un trabajo que colaborara en esa dirección.

Los contextos escolares están formados por una trama de relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido curricular. Tales factores necesitan ser abordadas en sus múltiples articulaciones para entender los aspectos del proceso de construcción de conocimiento.

Este libro aborda los contextos comunicativos en el aula y las explicaciones en la clase de matemáticas.

Capítulo 1

Problemática en la enseñanza del cálculo y la importancia de la variación

1. La problemática en la enseñanza del cálculo

La matemática universitaria, sobre todo en las escuelas de ingeniería, el cálculo es la materia a la que más tiempo dedica el currículum, este estudio se sitúa en una perspectiva un tanto distinta, al examinar las condiciones particulares del funcionamiento del sistema didáctico, donde la intención es comprender las pautas complejas de interacción que se suscitan para construir conocimiento entre profesores y alumnos, algo necesario como punto de partida para cualquier propuesta que pretenda mejorar la enseñanza del cálculo en su contexto real.

Se parte del supuesto de que, aunque la práctica de enseñar es seguramente una de las más antiguas de la cultura humana, su estudio sistemático y comprensión, en el caso particular de la matemática, representa una de las áreas de más reciente desarrollo en la investigación educativa. Por lo cual, consideramos pertinente realizar un trabajo que colaborara en esa dirección.

Los contextos escolares están formados por una trama de relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido curricular. Tales factores necesitan ser abordados en sus múltiples articulaciones para entender los aspectos del proceso de construcción de conocimiento.

El cálculo es un tema que se encuentra en un nivel avanzado dentro de la jerarquía de los conocimientos en matemáticas. Se halla entre la matemática elemental (aritmética, geometría, álgebra), propia de los ciclos básicos y medio superior del sistema educativo mexicano, y los temas de matemáticas avanzadas (análisis, ecuaciones diferenciales, variable compleja), característicos del nivel superior. Aunque el énfasis y profundidad se establece según la licenciatura o ingeniería, casi cualquier currículum universitario contiene, al menos un curso de cálculo. Por tal motivo, es el paradigma de la educación matemática superior (Farfán, 1992), pero

también constituye el de mayor índice de reprobación, de ahí que sea preciso dirigir los esfuerzos de investigadores en educación matemática hacia la diagnosis y solución del problema, cuyo panorama se ha tornado grave.

Asimismo, el cálculo ocupa un lugar primordial en el nivel superior. Sus vínculos con la matemática elemental y su papel en matemáticas y ciencia lo hacen un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico indispensable en la educación tanto de las ciencias exactas como de las humanidades; sin embargo, es uno de los factores causales de la deserción estudiantil en instituciones públicas y privadas del país (Albert, 1996).

El cálculo es la herramienta matemática que ha servido para describir los fenómenos de un mundo cambiante, e incluso se ha dicho que constituye la matemática del cambio y la variación. Pero tradicionalmente el cálculo ha sido entendido y enseñado como el estudio de los procesos inversos de derivación e integración en un contexto simbólico.

Debido a que la enseñanza de los principios del cálculo ha resultado siempre problemática, generalmente se enseña a los estudiantes a realizar, por ejemplo, de forma mecánica, alguna regla para evaluar una función o calcular una derivada y a resolver algunos problemas estándar. Así, se ha centrado en evaluar sólo las habilidades adquiridas en este dominio, es decir, una práctica algorítmica y algebraica del cálculo. Se dice que, con este tipo de enseñanza, ha disminuido sustancialmente el porcentaje de reprobados, pero no ha logrado que los estudiantes comprendan de manera satisfactoria los conceptos y métodos del pensamiento propios del cálculo.

Artigue (1991) ha reportado que los estudiantes tienen un dominio razonable de algoritmia algebraica, en términos de calcular la derivada como mínimo para las funciones simples, y dan un significado mínimo a los símbolos usados, por ejemplo dy/dx .

Otro tipo de enseñanza del cálculo consiste en que los alumnos se apropien de las ideas fundamentales de esta rama de las matemáticas, presentándoselas de una manera formal y rigurosa. Entonces, se consideran dos extremos para su enseñanza: algorítmico y formal. De alguna manera, los dos llevan a un manejo que carece de significados y, por ende, se reflejan en los altos índices de reprobación.

Aunque, en la última década, el cálculo se ha visto afectado por la presencia de medios electrónicos en educación y ha incorporado el enfoque numérico, la simulación y medición en tiempo real de fenómenos de variación gran cantidad de los maestros de matemáticas se concretan a “presentar” los contenidos de manera tradicional (definición, ejemplo, teorema, demostración, ejemplos, etcétera), de ahí que exista actualmente un problema grave para su enseñanza y aprendizaje. La *variación* es una noción fundamental para el desarrollo del cálculo; sin embargo, no es un objeto explícito del currículum.

2. La variación, centro de discusión

Partiremos de la premisa básica de que, en la naturaleza, lo único constante es el cambio. Los seres vivos cambian incesantes, el torrente de los ríos y de las tempestades fluye en permanente metamorfosis, los vientos desplazan gigantes y multiformes nubes, los pensamientos crecen y mueren más allá de nuestros ojos, la cantidad de circulante en una economía fluctúa de un momento a otro, los planetas se enfrían y se calientan en un proceso cíclico, la sangre corre por las venas, la energía se transforma y, con ella, se perciben los distintos estados de un proceso de modificación, los puentes vibran; en fin, un vasto tejido de situaciones de cambio escenifican nuestra cotidianidad. Este cambio, como parte de la realidad, resulta independiente de la conciencia, pero, sólo a través de ella, lo hacemos parte de nuestros conocimientos. Va primero de lo sensorial a lo perceptual, lo concebimos como un primer estadio de abstracción para apropiarse de lo real y, finalmente, lo creamos en un mundo de objetos abstractos en el que adquiere sentido a través de otros objetos y de sus relaciones. En ese mundo de entidades ideales, las nociones y conceptos hacen que aparezca con la ayuda de sus representaciones.

El cambio que caracteriza a la naturaleza esconde, bajo su intrincado aspecto desordenado, un robusto sistema de regularidades que han capturado el interés de grandes colectivos humanos durante distintas épocas y bajo diversos programas de investigación. Basta revisar fugazmente la literatura científica para encontrar que Newton, Euler, Clairaut, Feynman, Maxwell, Aristóteles, Oresme, Galileo, Laplace o Einstein trataron sistemáticamente con las situaciones de cambio.

A manera de ejemplo, centremos la atención en el movimiento. Diremos que existe en la naturaleza independientemente de la conciencia, ya que es un proceso autónomo a nuestras elaboraciones teóricas; sin embargo, nuestra visión del movimiento requiere de inventar una noción nueva, el cambio, con el que podemos enfocar los sucesivos estados como un primer nivel de elaboración teórica, una abstracción de primer orden.

Este cambio, que ha abstraído del movimiento un aspecto, el de sus estados sucesivos, puede ser sometido a un nuevo proceso de abstracción de segundo orden y conducir entonces a una nueva elaboración teórica, a la que llamaremos variación (Cantoral, 1997). De este modo, la noción de cambio da lugar a la de variación, la cual describe las cualidades del cambio y nos proporciona elementos para saber su proceso de transformación. En tal sentido, la variación trata de la medida de los cambios.

Si elegimos un sistema de representación externo específico, es posible interpretar la variación de modos diversos, ya sea mediante fórmulas, gráficas, dibujos y diagramas verbales o descripciones verbales metafóricas.

Al principio, las representaciones gráficas eran sólo cualitativas, como la de Oresme.

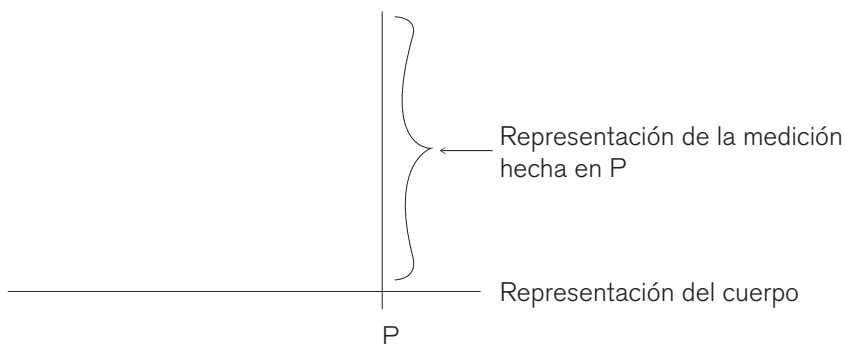
2.1. Oresme (1323-1382) y la latitud de las formas: la variación

Tal vez el trabajo más original y completo sobre la intensificación y disminución de formas y cualidades fue el desarrollado por Oresme en su obra *De configurationibus qualitatum et motuum*, donde expone un método para representar, mediante una figura geométrica, la intensidad de una cualidad de un objeto. De esta manera, logró poner al servicio del estudio de la variación algunos recursos de la geometría.

Veamos lo reportado en Moreno (1991). Para Oresme, el estudio de un cuerpo se compone de dos tipos de mediciones: las extensionales (globales), como el peso del cuerpo, y las intencionales (puntuales), como la temperatura. En este caso, la medición es puntual; cada “punto” del cuerpo tiene asociada una temperatura. Oresme, en primera instancia, se propone construir un modelo geométrico que le sirviera para medir. En el capítulo “Sobre la continuidad de la intensidad”, (véase Clagett, 1968) nos dice:

Toda cosa medible, excepto los números, puede representarse mediante una cantidad continua. Por lo tanto, para la medición de tales cosas es necesario que podamos representar los puntos mediante las líneas y superficies [...] porque en estas entidades geométricas pueden hallarse las mediciones como sus razones.

En el modelo geométrico de Oresme, la teoría de las proporciones constituye el campo operatorio para confrontarnos con el problema: representar para calcular; además, están presentes las concepciones aristotélicas del continuo. Por eso habla de los puntos de una recta como “una ficción necesaria” para representar un lugar del cuerpo sobre el cual se hace una medición intencional, que puede representarse mediante un segmento, de preferencia perpendicular al cuerpo, allí donde se realiza la medición.



Claro que la medida de la intensidad (en P) corresponde a la magnitud del segmento; tal longitud es la *latitud de la intensidad*. Al realizar mediciones intencionales, le interesa sobremanera a Oresme (Clagett, 1968) la consideración simultánea de todas las latitudes: “Toda cualidad lineal está representada mediante una superficie [...] la cantidad de esa superficie designa la intensidad de dicha cualidad”. Para él, la consideración simultánea de todas las latitudes (lo que llama “la latitud de una forma”) es el camino de acceso al estudio de la variación.

Cabe aclarar que la “cantidad de una superficie”, se refiere a la colección completa de las latitudes de intensidad, a una superficie compuesta por todos los segmentos que representan mediciones de intensidades: una especie de integración (Zubieta, 1996).

Además, Oresme introduce los términos “uniforme” para referirse a una cualidad cuyas latitudes no cambian con el tiempo -son constantes- y “uniformemente diforme”, para designar una cualidad cuya latitud es variable, pero su razón de cambio con respecto al tiempo resulta constante. Sin embargo, no restringe su estudio a estos casos porque también aborda el siguiente problema: si la aceleración es “diforme”, entonces la velocidad es “diformemente diforme”, hay movimientos donde la aceleración del móvil no es constante.

Podríamos interpretar esto como una forma de representación puesta al servicio de una forma de calcular. Se ilustra lo anterior con el teorema siguiente, que aparece en la obra de Oresme (Clagett, 1968):

La distancia recorrida por un cuerpo partiendo del reposo y moviéndose con aceleración uniforme es la misma que la que un cuerpo recorrería, si se moviera en el mismo intervalo de tiempo con una velocidad uniforme, la cual es un medio de la velocidad final, de la del primer cuerpo.

Oresme hace un estudio de la variación, autónomo de cualquier contexto físico. De hecho, sus representaciones eran totalmente imaginarias y cualitativas, jamás las verificó mediante mediciones. Galileo (1564-1642) introdujo lo cuantitativo en las representaciones de Oresme (René de Cotret, 1988).

Descartes (1596-1650) pensó en los términos de una ecuación como funciones entre variables y , sobre todo, cuando facilitó una posibilidad para representar figuras gráficas de las situaciones y relaciones *fluidas*.

Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) realizaron una prodigiosa creación, denominada en la actualidad *cálculo*, que por primera vez permitió el análisis matemático de todo *movimiento y cambio* (Bergamini, 1983). En cálculo, ellos combinaron la técnica de la división en las partes pequeñas de los griegos y el sistema gráfico de Descartes, para crear un maravilloso instrumento mental con el

fin de que operara en una ecuación para llegar a los infinitésimos. El cálculo probó su efectividad tan rápidamente que, en unos cuantos años, Newton lo utilizó para establecer las leyes del movimiento y de la gravitación.

Bergamini (1983), en un texto de divulgación científica, describe las distintas clases del cambio que pueden analizarse en el cálculo, como:

- La variación en estudio puede ser tan dramática como la velocidad acumulable en un cohete dirigido al dejar su base o tan suave como la pendiente variable de una carretera de una montaña
- Puede ser tan visible como los kilos que se añaden a la que en un tiempo fue una esbelta cintura o tan invisible como los altibajos en una línea de potencia
- Puede ser tan sonora como el *crescendo* de un concierto de Beethoven o tan silenciosa como la concentración paulatina y en suave aumento de la fuerza de la corriente del agua embalsamada

2.2. El cálculo y el movimiento

Cuando los grandes matemáticos del siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm von Leibniz desarrollaron el cálculo¹ como una forma de medir el movimiento estaban, en cierto modo, introduciendo en las matemáticas el principio de las películas de cine. De la misma forma que una película consiste en la repetición de fotografías de un objeto, el cálculo transforma el movimiento en “naturaleza muerta” que puede ser observada “figura por figura”.

Al inventarse el cálculo, los matemáticos podían tratar a un objeto en movimiento como un punto que describe una trayectoria a través del espacio y, “deteniendo la acción”, calcular la velocidad del objeto y la aceleración en un mundo específico. La Tierra en la que vivimos está en movimiento, como también las moléculas del aire que respiramos. Por medio del cálculo, tales movimientos pueden definirse a pesar de que no pueden verse. Aunque algunas de sus abstracciones son tan difíciles como cualquier cosa en matemáticas, el cálculo está basado en algunas ideas simples.

El cálculo constituye la herramienta matemática que ha servido para la descripción de los fenómenos de un mundo cambiante; se ha dicho que es la matemática del *cambio y la variación*.

Como ya hemos afirmado, la variación es fundamental en los diferentes conceptos del cálculo, forma parte esencial de la articulación de todo discurso didáctico del cálculo (está dentro del concepto de función, derivada, etcétera); sin embargo, no es un objeto explícito del currículum en tanto definición matemática.

¹ El cálculo se utiliza para “aislar” matemáticamente movimientos complejos y analizar un proceso cambiante fase por fase. (Bergamini, 1983)

Se podría decir que el cálculo estudia lo que varía y cómo varía. El primer objeto (lo que varía) lo identificamos como las *funciones*, el segundo (cómo varía) serían las *derivadas* y *diferenciales* de esas funciones (Solís, 1999).

Habremos de notar que la noción de variación está ausente en las definiciones matemáticas modernas de los conceptos. Aquí se ejemplifica con el concepto de función:

Zill (1987). Una función de un conjunto A en un conjunto B es una regla que hace corresponder a cada elemento de A, cuando más un elemento de B.

Sin embargo, basta retroceder un poco en la historia para encontrarla en las distintas definiciones que se han dado del concepto.

Cauchy (1821). Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones. (Phili, 1988)

Euler (1755). Unas cantidades dependiendo de otras, de manera que, si las otras cambian, estas cantidades también cambiarán. (Youschkevitch, 1976)

Bernoulli (1667-1748). “Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes (Cantor, 1986).

Es interesante constatar que, en las dos definiciones del concepto de función, las nociones centrales son la variación y la dependencia: la correspondencia está presente más de forma implícita. Posteriormente, entre más nos acerquemos a las definiciones modernas, más se verá desaparecer gradualmente la variación y después la dependencia, de la cual uno puede encontrar algunos trazos con la regla de correspondencia para, finalmente, quedar en una correspondencia pura.

3. La investigación

El pensamiento y el lenguaje variacional describen, genéricamente, un programa de investigación en marcha, que considera diversos acercamientos metodológicos con los que busca entender cómo es que se construye o se forma progresivamente el pensamiento y el lenguaje variacional en los estudiantes, profesores y grupos escolares. La investigación general tiene por objeto alcanzar un mayor entendimiento del funcionamiento de nuestro propio sistema escolar para buscar incidir con mejoras didácticas en lo futuro (Cantoral, 2013a).

En la investigación se abordaron ciertas fases de la enseñanza en clase que son explícitamente reservadas al discurso oral del profesor, y que atañen a la exposición de conocimientos nuevos (institucionalización).

Este trabajo intenta comprender las tramas de relaciones entre el profesor, los alumnos y el contenido curricular. Por ello, dado que se ha considerado al profesor como el portador del saber que habrá de escenificarse en el aula, se emprendió un amplio estudio sobre las formas en que los maestros desarrollan un conocimiento específico acerca de la manera de enseñar su materia, cuando requieren de tratar una idea matemática fundamental para el cálculo: la variación.

Así, una forma de abordar el estudio sobre la enseñanza de la variación es por medio del *discurso en el aula*, donde la palabra se utiliza la mayor parte del tiempo. La comunicación y, específicamente, las interacciones docente-alumno y alumno-alumno se consideran en la actualidad la base del proceso de aprendizaje (Tusón y Unamuno, 1999). Una de las maneras de tener acceso a la información sobre cómo se introduce y se desarrolla la noción de variación consiste en analizar el discurso del profesor, pero también el de la interacción social que se realiza en el aula escolar. Por lo anterior, se delimita el estudio a través de las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el papel que juega la variación en el discurso del profesor?
- ¿Qué sucede con la noción en la interacción?

Las preguntas se plantearon en un estudio de campo, cuyo diseño y particularidades se describirán posteriormente. Vale la pena aclarar que el análisis de las intervenciones de los docentes toma en cuenta también las opiniones de los alumnos y la estructura del contenido, ya que ambos actúan como referentes de sus contribuciones y el significado depende del contenido interactivo. El objetivo principal del libro *es localizar y analizar las maneras cómo se introduce y desarrolla la noción de variación en situación de enseñanza en el nivel superior*. En particular se centrará sobre función y derivada, ya que aquí aparece evidente la noción de variación y, además, se tomarán como modelos para estudio.

Capítulo 2

Estudios de interés particular

1. El Discurso

El interés de algunos investigadores (lingüistas, sociólogos o didactas) por el *discurso* de los profesores en la clase no es nuevo; varios trabajos lo abordan. Sin embargo, la complejidad de este tipo de discurso y la dificultad de encontrar un buen cuadro para analizarlo es, sin duda, el origen de que a pocas investigaciones se les ha seguido la pista en el campo de las matemáticas (Josse & Robert, 1993).

Pero en años recientes algunos documentos de investigación, en el campo de la educación matemática, han atendido a los términos de *discurso*, *comunicación* e *interacción verbal* en las lecciones matemáticas. La dificultad de investigarlos estriba en suponer que constituye un problema metodológico mayor para todos los proyectos de investigación observados en el aula. Hasta cuando no es posible esperar un acuerdo general sobre una metodología de análisis, se asume una actitud común que puede ser un rechazo de esquemas estándares del análisis del discurso (Sfard, 2002). En otras investigaciones, se aprecia que no hay una metodología única; por ejemplo, Bartolini Bussi (1998) emplea una que se enfoca principalmente en la coherencia entre los motivos generales (*metas a largo plazo*) de la actividad de enseñanza y las decisiones del maestro acerca de las actividades y estrategias comunicativas adaptadas durante la interacción en el aula (*análisis no refinado, análisis refinado, análisis a corto plazo*). Mientras Rebollo (2001), afirma que es importante rescatar e incorporar el discurso como herramienta científica, situándola tanto desde campos disciplinares y tradiciones teóricas consolidadas. El marco y contexto científico en que se sitúa el discurso le otorga credibilidad en la construcción del conocimiento en la investigación educativa.

Anna Sfard (2002) propone un *método comunicacional para la cognición*, en el que se estudia un sistema que permite estar en sintonía con las interacciones donde se

origina el cambio. El discurso a enseñar se desarrolla con base en los discursos en los que se sostiene que los niños ya tienen conocimiento: el maestro nunca parte de cero.

Seeger (2001) considera la *perspectiva etnográfica*, ya que afirma que la relación entre el contenido y las formas de una cultura juega un papel importante; aquí, la noción de cultura aparece como un concepto híbrido múltiple. Él se propone estudiar a dos profesores que aceptaron probar un material para estudiantes con discapacidades de aprendizaje, el cual enfatizaba la importancia del conocimiento relativo a las matemáticas y los problemas para relacionar el conocimiento y los procedimientos matemáticos con la experiencia concreta, postulando a la necesidad de discutir e intercambiar ideas como un aspecto capital de la actividad matemática.

Dichos trabajos, independientemente de la metodología, dejan en claro que el discurso matemático escolar debe permanecer siempre como una parte del discurso cotidiano. Además, la comunicación continúa siendo un tema central en la reforma de la educación de las matemáticas (NCTM, 1998; 2000); sin embargo, aún hay muchas preguntas que deben ser contestadas con relación al discurso en el aula y acerca de los factores que contribuyen al desarrollo del discurso matemático (Ball, 1991, Silver & Smith, 1996).

Consideramos importante citar los trabajos de Pimm (1991), que se centran en el discurso del profesor en la clase de matemáticas y dan idea sobre la importancia de la metacomunicación. Las matemáticas, generalmente, se consideran como un cuerpo de conocimiento individual y socialmente construido y como lenguaje especializado para comunicar diversos aspectos de nuestro mundo (Pimm, 1991).

Para Pimm, el lenguaje no sólo desempeña un puesto central en educación, sino también constituye un hecho central en la vida social al estar en juego las actitudes y creencias más profundas de las personas porque, a través del lenguaje, se mantienen y reconocen las identidades personal y social. Pimm da un importante paso en tal contexto mediante el análisis del discurso, hablado y escrito, en el caso concreto de las matemáticas (aritmética y álgebra).

Otras obras abordan el tema, como *El discurso en el aula* (Cazden, 1991), donde interesa en la medida en que, a través de tal elemento, podamos observar desde dentro las circunstancias sociales de la clase y, consecuentemente, la capacidad de asimilación de los alumnos. El estudio del discurso escolar permite afirmar que toda institución social es un sistema de comunicación, ya que determinadas características de las instituciones docentes hacen de la comunicación un elemento decisivo.

Candela (1999) se fija en la reconstrucción que hacen los alumnos de su experiencia con el mundo físico durante las clases de ciencias. Analizan las explicaciones, justificaciones y argumentaciones que unos niños de clase baja de

una zona urbana marginal elaboran durante la intervención discursiva con los docentes en el aula de una escuela primaria oficial. Una de las formas de tener acceso a la información sobre las características de este proceso de creación de una cultura científica es investigar el discurso en la interacción social que se realiza en la escuela.

Mientras que, Mopondi (1995) profundiza en los efectos que tienen las explicaciones en clase sobre los comportamientos de los alumnos, y hace un estudio comparativo entre un método clásico de enseñanza y uno más constructivista. Sierpinska (1994) establece una diferencia entre las explicaciones científicas y las didácticas. Las científicas, cuyo objetivo es llegar a unas bases más conceptuales del entendimiento, son encontradas en la mayor parte de la ciencia, mientras que las didácticas, que se dirigen a unas bases familiares del entendimiento (una imagen o solo algún conocimiento previo y experiencias), frecuentemente son llamadas así en el ámbito de la enseñanza. Éstas las tomaremos en cuenta para nuestro estudio.

Por lo que respecta al trabajo de Josse & Robert, *Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs* (1993), presentan la aplicación de un método de análisis del discurso (audiograbado) de dos profesores de matemáticas en dos clases diferentes, una sesión es introductoria al trabajo sobre la homotecia que habían preparado en común.

Se comparan los discursos de los dos profesores y, a pesar de su preparación común, se observaron diferencias de desarrollo y, sobre todo, en la manera de dar pautas a los alumnos, al valerse de referencias distintas.

Bartolini Bussi (1998) estudia la interacción verbal en el aula influenciada por ideas vygotskianas, al realizar un experimento de enseñanza de coordinación de perspectivas espaciales, y discute una metodología de análisis para las transcripciones. Observa que el doble movimiento entre el sentido personal de un concepto y el significado matemático compartido resulta crucial para que el aprendizaje se lleve a cabo; el papel del maestro y los estudiantes determina su surgimiento (esta experiencia se efectuó con niños de primero y segundo de primaria). La consideración de que el proceso de enseñanza-aprendizaje enfatiza la importancia de las interacciones en el aula y el contenido matemático que se está discutiendo da pie a su estudio y, en nuestro caso, la investigación de la naturaleza de esas interacciones y cómo el contenido matemático (o significado compartido de conceptos) influye en el desarrollo de las discusiones.

En el caso de Sfard, (2002) analiza dos aulas donde el aprendizaje de un nuevo tema matemático de enseñanza apenas ha comenzado. En la primera clase (séptimo grado) se introduce el concepto de números negativos, y en la segunda (primer año) los alumnos empiezan a aprender geometría básica.

La experiencia del discurso a enseñar se desarrolla con base en los discursos ya conocidos por los niños. Los estudiantes deben tener primero una idea de un objeto matemático nuevo, después dar un nombre a su idea y eventualmente practicar su uso; se muestra la imposibilidad de enseñar un discurso nuevo sin realmente hablar sobre sus objetos desde el primer momento.

El interés creciente en los contextos sociales de la cognición ubica al lenguaje como el medio que une lo cognoscitivo con lo social (Cazden, 1990). Tal es el caso de los estudios citados en Candela (1990), que exploran la relación entre cultura, lenguaje y cognición, los cuales ven al desarrollo cognoscitivo y lingüístico como una forma de socialización y aprendizaje cultural. En otros trabajos, se concibe al lenguaje como una mediación cultural para el pensamiento y la acción expresados en prácticas cotidianas (Edwards y Mercer, 1987).

Algunas posturas dentro de la psicología social e histórico-cultural (Vygotsky, 1984; Wertsch, 1991) proponen que el lenguaje es un medio para desarrollar el pensamiento. Para Vygotsky², la comprensión del mundo físico está fuertemente influida por categorizaciones sociales que se interiorizan de cierto contexto cultural. Si se entiende al lenguaje como un sistema de recursos para construir significados, entonces el estudio del discurso en el aula atiende al significado que se construye en el contexto de la interacción (Stubbs, 1983).

Stubbs (1993), resumiendo el trabajo de Barnes (1969) sobre el lenguaje de clase, dice:

El profesor puede considerar que el lenguaje propio de su materia tiene la función intelectual de facilitar la expresión de los conceptos. Pero su lenguaje tiene también la función sociocultural de apoyar su papel como docente. Y desde el punto de vista de los alumnos, cada nuevo término puede revestir una función sociocultural predominante: es “el tipo de cosas que dice mi profesor”. Barnes indica aquí una fuente de interferencia sociolingüística entre alumnos y profesores que tienen distintas ideas sobre las convenciones estilísticas. O sea, el docente puede utilizar un determinado tipo de lenguaje, no porque su uso depende de una convención. Pero es difícil que los alumnos compartan esas convenciones

² El desarrollo del pensamiento está determinado por el lenguaje; es decir, por las herramientas lingüísticas del pensamiento y la experiencia sociocultural del niño. Esencialmente, el desarrollo del lenguaje interiorizado depende de factores externos; el de la lógica del niño es una función directa del lenguaje socializado (Vigotsky, 1962).

La existencia de este lenguaje oficial en matemáticas y la preocupación de muchos profesores para que lo utilicen sus alumnos constituyen uno de los muchos obstáculos que pesan sobre el fomento a una auténtica discusión. El profesor podría tratar de crear con su clase un lenguaje común y un conjunto de significados que allí tuviesen sentido (Pimm, 1990).

Citado por Flores (1995), A. & Sowder, (1995), Pirie (1988) señalan que los estudiantes aprenden conceptos matemáticos no por sus experiencias con materiales concretos, sino por sus reflexiones acerca de tales vivencias. La importancia del lenguaje y el pensamiento no es, desde luego, un descubrimiento reciente; Piaget (1973) afirmó que la participación de los niños en conflictos sociales tales como las discusiones desarrolla sus habilidades de ver con perspectiva, fomentándose el crecimiento cognitivo. Vigotsky (1962) subrayó el papel del lenguaje social en el auge del pensamiento y Bishop (1985) enfatizó en la importancia de la construcción social del significado para la educación matemática.

2. La importancia del discurso

El discurso matemático en el salón de clases proporciona un escenario al maestro y los alumnos para representar, pensar, hablar, estar de acuerdo y en desacuerdo, como explica Ball (1991):

Discurso se utiliza para subrayar los modos en que el conocimiento se construye e intercambia en el salón de clases. ¿Quién habla? ¿Acerca de qué? ¿Dé que manera? ¿Qué preguntas son importantes? ¿De quién se aceptan ideas y modos de conocer y de quién no?, etcétera

El profesor genera las relaciones sociales, el sistema de comunicación que dispone para la reflexión y el proceso mediante el que los alumnos relacionan un nuevo conocimiento con el anterior, valiéndose del discurso (Cazden, 1990).

Según Eisenhart (1988), todas las actividades de los humanos son esencialmente sociales y forman significado. Desde la perspectiva etnográfica, “los significados y acciones, contexto y situación están ligados y no tienen sentido en aislamiento unos de otros. Los hechos de la actividad humana son construcciones sociales; existen sólo por acuerdo social o consenso entre los participantes en un contexto o situación”.

De acuerdo con Cobb, Yackel y Wood, (1992), el papel del maestro es “facilitar la discusión matemática entre los alumnos”, mientras que al mismo tiempo actúa como participante que puede legitimar ciertos aspectos de su actividad matemática y sancionar otras. Además, el papel del maestro como facilitador ayuda a los alumnos a expresar su pensamiento matemático, a que conceptualicen

situaciones de maneras diferentes y se desarrollen matemáticamente (Cobb, Yackel y Wood, (1992); Merkel (1990)).

El discurso en el salón de clase proporciona al maestro un medio para entender las necesidades sociales. Jungwirth (1991) señala que el conocimiento matemático y el lenguaje se construyen oficialmente durante la interacción entre los estudiantes y el profesor. A través del discurso, los alumnos llegan a darse cuenta qué es lo que se considera importante y cómo se debe comunicar. Así, el conocimiento matemático no necesita estar expresado en un lenguaje matemático tradicional.

Cuando los alumnos colaboran hacen más que combinar procedimientos para desarrollar una solución conjunta; la discusión resultante los conduce a entender las ideas en desarrollo y los intentos de solución de sus compañeros (Yackel, 2002). Si construyen ese tipo de discurso no sólo aumenta el tiempo que participan en las actividades para resolver problemas, sino que la naturaleza de tales ejercicios se extiende para abarcar oportunidades que raramente surgen en situaciones de enseñanza tradicional.

3. Relación con el problema de investigación

La investigación que presentamos está ubicada en la línea de trabajos representativos sobre la interacción discursiva en el aula desde la perspectiva del profesor, pero considera la participación de los alumnos y un contenido matemático como elemento a partir del cual podemos interpretar y comprender sus procedimientos de trabajo. Estudiaremos cómo se introduce y desarrolla la noción de variación en el salón de clase. La observación en el aula y los registros constituyen la fuente principal de información.

Postulamos que la enseñanza es dirigida por el maestro, más la influencia de los alumnos será decisiva para muchas de las acciones que emprenda, viendo a los alumnos como aquellos que reciben la enseñanza del profesor.

Las matemáticas, generalmente, se conciben como un cuerpo de conocimiento individual y socialmente construido, así como un lenguaje especializado para comunicar diversos aspectos de nuestro mundo (Pimm, 1991). Sin embargo, el nuevo conocimiento matemático (individual o compartido) se construye a través de las interacciones y conversaciones entre profesores y alumnos, de ahí que el movimiento entre el sentido personal de un concepto y el significado matemático compartido resulta decisivo para que el aprendizaje se lleve a cabo (Bartolini Bussi, 1998).

Como esta visión del proceso de enseñanza-aprendizaje enfatiza la importancia de las interacciones en el aula y el contenido matemático que se examina, se estudian esas interacciones y cómo el contenido matemático o el significado compartido de conceptos influye en el desarrollo de las discusiones.

Hemos visto la importancia de tomar en cuenta el discurso (interaccional), ya que es el medio que sirve de transporte para la enseñanza y el aprendizaje. El aula viene a ser un espacio común para el entendimiento mutuo, para cierta negociación de conocimientos y para la formación de significados compartidos.

Los estudios antes citados inducen a considerar un cambio de perspectiva en la investigación sobre los maestros, esto es, abandonar lo que podemos llamar una “perspectiva tutelar”, donde se ahonda en los efectos causados por intervenciones institucionales o individuales en la formación de docentes, para centrar nuestra atención en el discurso efectivamente sostenido en la clase de matemáticas, en una escuela de ingeniería.

Dichos trabajos son de suma importancia para la línea de investigación (discurso matemático en el aula), ya que se estudia el discurso del maestro y el discurso en la interacción social, considerando un contenido matemático como la variación. Además, los contextos escolares están formados por una trama de relaciones entre el docente, los alumnos y el contenido, factores que necesitan ser atendidos en sus múltiples articulaciones para lograr comprender los variados aspectos del proceso de construcción discursiva. Este estudio va encaminado en esa misma dirección, aunque, los que hemos consultado, incluyen un contenido de las ciencias naturales donde el análisis del discurso en el aula es un medio privilegiado para estudiar los procesos educativos, cuando se intenta comprender los mecanismos y procedimientos con los que los participantes construyen el significado, ver por ejemplo (Candela, 1999).

Además, se localizan y analizan las maneras en que se introduce y desarrolla la noción de variación en situación de enseñanza dentro de nivel superior. En tal sentido, se ha considerado al discurso del profesor (atendiendo a un contenido matemático: función y derivada), ya que genera un conocimiento específico sobre la forma de enseñar su materia. El trabajo aborda el papel del discurso en la clase de matemáticas cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados con la noción de *variación*, ya que el discurso instaaura el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela. Por tanto, construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente. Debido a que los contextos escolares están formados por una trama de relaciones entre docente, alumnos y contenido curricular, interesa analizar los elementos y características de una sesión de clase y las explicaciones de los profesores para enseñar una noción compleja, como la variación, sin dejar de lado la intervención de los estudiantes.

Capítulo 3

Perspectivas teóricas: trasposición didáctica y situaciones didácticas

1. Dos aproximaciones teóricas

Con base en diversas investigaciones que, de una u otra manera, destacan la importancia de la interacción discursiva en el aula para la construcción de un conocimiento, se sustenta el presente trabajo en algunos elementos de carácter teórico que ha desarrollado la escuela francesa en Didáctica de la Matemática, la cual ha procurado una aproximación sistémica a los fenómenos de la enseñanza donde interactúan los profesores, los estudiantes, el saber y las relaciones que se generan entre ellos:

► El *profesor*, cuya historia propia se manifiesta a través de sus creencias respecto a la matemática, a la enseñanza, al aprendizaje y a su profesión. Ciertas investigaciones en didáctica de las matemáticas abordan como objeto de estudio las representaciones que el profesor tiene de dichos factores, y su importancia radica en que han demostrado que esas representaciones determinan el quehacer del maestro, así como la interpretación que hace de los programas y de los contenidos de los textos. En tal sentido, podemos decir que el *saber a enseñar* es lo que piensa el profesor que debe ser enseñado después de hacer tales interpretaciones.

► El *alumno* es un sujeto psicológico y, a la vez, social, pero especialmente se le considerará como un sujeto “que conoce” en una determinada situación de enseñanza.

► El *saber*, que constituye el objeto principal de la enseñanza y tiene también una historia particular, mantiene relaciones culturales y sociales con el exterior de la clase, las cuales determinan en gran medida el contenido a enseñar y su forma de presentación.

El calificativo sistémico va en el sentido de que el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de los componentes del sistema didáctico. Brousseau (1986) definió a la didáctica de las matemáticas como “el estudio de la evolución de las *interacciones* entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con el objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto” (Alanís, 1996).

Al respecto, se han desarrollado dos aproximaciones teóricas que sustentan la didáctica -complementarias entre sí- y proponen, en mayor medida, la aproximación sistémica:

- ▶ La **teoría de las situaciones didácticas**, que ha tenido la influencia más determinante; su fundador es G. Brousseau.
- ▶ La **teoría de la transposición didáctica**, que se ha desarrollado alrededor de los saberes, a partir de los trabajos de Y. Chevallard.

2. Teoría de situaciones didácticas

Brousseau (1986) desarrolló la teoría de situaciones didácticas, que engloba el conjunto de relaciones expresadas en el salón de clase entre el docente, los alumnos y el conocimiento, pretende modelar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos que surgen en el ámbito escolar. El concepto de *situación* ha sido renovado en la didáctica por Brousseau, quien le ha dado no sólo un aspecto didáctico que no tenía lugar en la psicología,³ sino también un significado en el que la dimensión afectiva y dramática intervienen tanto como la dimensión cognitiva.

Así, la situación didáctica implica que los conocimientos de los alumnos son conformados por los hechos a los cuales se enfrentan y dominan progresivamente, en especial por los primeros, susceptibles de dar sentido a los conceptos y procedimientos que se les quiere enseñar.

La perspectiva de una didáctica de las matemáticas a partir de la teoría de las *situaciones didácticas*, desarrollada por Brousseau, destaca que la situación presentada a los alumnos debe propiciar interacciones que faciliten la comunicación

³ J. Piaget, quien elaboró la teoría de la construcción progresiva del conocimiento, pensaba que el conocimiento pasa de un estado de equilibrio u otro a través de fases transitorias, en cuyo curso se pone en evidencia la validez de los conocimientos anteriores. Si ese momento de desequilibrio es superado, obedece a que ha habido una reorganización de conocimientos, mediante la cual las nuevas adquisiciones son integradas al viejo saber. Aplicar esta teoría al conocimiento matemático lleva a considerar que las situaciones-problema presentadas a los alumnos constituyen un factor importante para hacer evolucionar sus representaciones y procedimientos. Brousseau, al respecto, ha desarrollado la *teoría de situaciones didácticas*.

e intercambio de informaciones codificadas, o no codificadas, en un lenguaje matemático, así como el intercambio de juicios para debatir sobre la validez o no de una afirmación. Además, el maestro necesita propiciar esas interacciones entre los alumnos cuando trabajan en una situación de aprendizaje, cuidando que no se pierda de vista el “sentido del conocimiento” matemático que pretende que construyan los alumnos.

La teoría de Brousseau señala como funciona una situación didáctica, nosotros en cambio estudiamos las prácticas cotidianas del aula y usamos el concepto de envejecimiento para analizar la presentación escolar de la noción de variación.

A partir de tal enfoque se rescata la importancia del tipo de recursos discursivos con un problema planteado a los alumnos a propósito de la noción de variación, así como de la diversificación del tipo de intervenciones que debe considerar el profesor para propiciar esas interacciones.

Se retoma lo que Brousseau (1986) señala acerca de lo que tiene que hacer el profesor en su salón de clase: Simular en su clase una microsociedad científica, si quiere que los conocimientos sean medios económicos para plantear buenos problemas y para solucionar debates, si quiere que los lenguajes sean medios para dominar de formulación y que las demostraciones sean pruebas.

Las representaciones que el profesor tiene de la enseñanza y del aprendizaje influyen en su quehacer y en la elección de su estrategia, vía para que se transforme el saber que entra al aula. Dichas transformaciones son determinadas por relaciones casi siempre implícitas, reguladas por lo que Brousseau llamó *contrato didáctico*.

Douady (1995) demostró que el maestro juega un papel esencial en la fase de *institucionalización*. Sus trabajos tienden a probar que el profesor puede introducir “magisterialmente” ciertas nociones con una buena apropiación de conocimientos por los estudiantes, mientras que Chevallard puso en evidencia el *contrato didáctico*, al analizar sus momentos de ruptura.

2.1. Contrato didáctico

Guy Brousseau (1990) ha entendido por contrato didáctico al conjunto de relaciones implícitas que regulan el funcionamiento de la clase y las interacciones entre el maestro y los alumnos. Esta noción no es puramente social, sino que implica directamente los contenidos del conocimiento.

Cualquier modelo de la enseñanza requiere, para su funcionamiento en el salón de clase, de una negociación entre el profesor y los alumnos con el fin de regular las interacciones *maestro-alumno-saber*, una negociación incluida ampliamente por las expectativas del maestro. Su resultado se designa como *contrato didáctico*, en el que se define *¿quién puede hacer qué?*, o *¿quién debe hacer qué?* respecto al conocimiento y

no tanto a las reglas de comportamientos. Este contrato, con componentes explícitos e implícitos, define las normas de funcionamiento dentro de la situación, como distribución de responsabilidades, asignación de plazos temporales a diferentes actividades, permiso o prohibición del uso de determinadas recursos de acción, etcétera.

Las relaciones que emanan del contrato didáctico muestran “una diversidad de los roles que deben considerar el docente y el alumno, o con los cuales podrían identificarse. Estos roles movilizan diferentes saberes y funcionamientos del saber” (Brousseau, 1998). A partir de ello radica la importancia del análisis de las intervenciones que hace el maestro en el aula, cuando sus alumnos resuelven problemas matemáticos.

Asimismo, tocante a las intervenciones del profesor en la negociación del contrato didáctico, se presentan diversos *fenómenos didácticos* que debe controlar, es decir, ciertos efectos de pérdida de sentido de los conocimientos, ya que la enseñanza de la comprensión y del sentido del conocimiento representa un verdadero problema didáctico.

Así, en todas las situaciones didácticas el profesor intenta hacer saber al alumno lo que él desea que haga. Teóricamente, el paso de la información y de la consigna del maestro a la respuesta esperada debería exigir, por parte del alumno, poner en acción el conocimiento considerado, ya esté en proceso de aprendizaje o sea conocido. Sabemos que el único medio de hacer matemáticas consiste en buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a ese respecto, plantear nuevas interrogantes. El maestro, entonces, necesita llevar a cabo no la comunicación de un conocimiento, sino la transmisión del problema correcto; si esta transmisión opera, el alumno entra al juego y, si termina por ganar, el aprendizaje se logra.

Pero ¿qué pasa si el alumno rehúsa o evita el problema, o no lo resuelve? Aquí, el maestro tiene la obligación social de ayudarlo y hasta a veces de justificarse por haber planteado una cuestión demasiado difícil. Como ese sistema de obligaciones recíprocas se asemeja a un contrato, lo que nos interesa aquí es el contrato didáctico, sobre todo la parte que se especifica del “contenido”: el conocimiento matemático considerado.

3. La teoría de la transposición didáctica

Dentro del marco francés para la didáctica de las matemáticas hay diferentes tipos de saber. Así, se habla del “saber sabio” (saber científico), del cual una parte es seleccionada para su enseñanza porque, se supone, será de gran utilidad social; sin embargo, es preciso modificarlo para que su instrucción sea posible. De ahí surge el “saber a enseñar”, que no es una simplificación del saber proporcionado

por la sociedad científica, sino el resultado de ajustes didácticos que le hacen diferir cualitativamente de sus saberes de referencia. La transformación del “saber sabio” en “saber a enseñar” está determinada por las siguientes restricciones: las características del contenido que se desea enseñar, y las restricciones sociales y culturales que actúan dentro del proyecto para seleccionar el contenido de la enseñanza.

El saber “es la puesta en acción de los conocimientos pertinentes en los problemas abordados y van más hacia la habilidad con que se domina algo”, y en su interior hay diferentes tipos: el del sabio, el del maestro, el de los programas, el que se convierte en objeto de enseñanza (tanto el manejado en los libros como el propuesto por el profesor) y el del alumno.

Como en la comunicación de un saber a un público determinado se origina la modificación de ese conocimiento, al proceso en el que tiene lugar la acción de pasar un saber hacia un sitio didáctico se le denomina *transposición didáctica*. Chevallard (1991), quien introduce este término dentro de la didáctica de las matemáticas, expone:

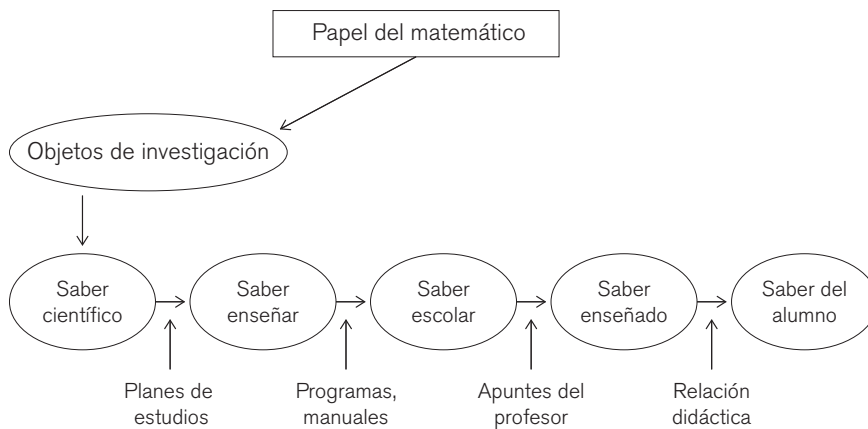
[...] cuando el maestro presenta y explica el conocimiento a los alumnos existen cambios, que [son denominados] transposición didáctica, [la cual se define] como el proceso por el cual un elemento de un saber científico se convierte en un conocimiento a enseñar (la forma en que aparece un contenido en los programas escolares, libros de texto o en tradiciones de enseñanza), y después en un objeto de enseñanza (la forma de existencia de conocimiento en el aula).

Es así como cada maestro selecciona los contenidos que va a transmitir, los presenta de una forma particular (hace una “traducción” con el propósito de que se “entienda” lo que se enseña) y los relaciona con otros saberes, les imprime un énfasis y una emotividad. Algunos los resaltan, al darles un carácter “científico”, mientras que a otros los minimiza o ignora, los refuerza con actividades o ejemplos o sólo los menciona.

Sin embargo, las decisiones -conscientes o inconscientes- que toma el maestro para presentar los conocimientos escolares no sólo dependen de su estilo o experiencia docente, de su dominio del tema, de lo que se indica en el texto, del objetivo a cumplir o de lo que piensa que el aprendiz puede entender, sino también están influenciadas por las interacciones con los alumnos, esto es, precisa de sus preguntas, conocimientos, experiencias e intereses.

En un sentido amplio, se trata de un proceso con un desarrollo más complejo en el que intervienen múltiples aspectos: en primer lugar, el profesor ha de adaptar sus propios conocimientos a los objetos a enseñar, luego debe instalarlos en

el saber escolar y, por último, organizarlos temporalmente. Necesita realizar una transición del *saber escolar al saber enseñado*, teniendo en cuenta que este último nunca es totalmente retenido por el estudiante sino que, a través de la *relación didáctica* entre el profesor y los alumnos, el *saber enseñado* se convierte en *saber del alumno*. En esta relación didáctica interesa, para nuestra investigación, *dar cuenta de los recursos discursivos que se usan (por parte del profesor, pero influenciados por los alumnos) y construyen en la interacción respecto a la noción de variación*. Todo lo anterior se describe en el esquema siguiente:



Los contextos escolares están formados por una trama de relaciones entre el docente, los alumnos y el contenido que necesitan ser tomados en cuenta, en sus múltiples articulaciones, para comprender los variados aspectos del proceso de construcción discursiva. Y en esa *relación didáctica* surgen fenómenos ligados con la actividad de enseñanza (y el control de la transposición didáctica) como los expondremos a continuación:

3.1. Fenómenos ligados con la actividad de enseñanza

Los fenómenos que se producen en la enseñanza determinan el campo a teorizar, no la actividad didáctica. Su identificación lleva a construir un “modelo” de los protagonistas en presencia de las relaciones y de las dificultades que los ligan, y a mostrar que el juego de esas dificultades produce los efectos y el desarrollo observados. Tales fenómenos están asociados con el control de la transposición didáctica y han podido ponerse en evidencia:

- Efecto Topaze y el control de la incertidumbre

Surge cuando el maestro manipula el sentido del conocimiento y toma a su cargo lo esencial de la situación que debe resolver el alumno. Como el maestro no

puede aceptar que sus alumnos cometan graves errores, y como no puede decir esto directamente, interviene para sugerirles “la respuesta, disimulándola”. Aquí, él espera que los alumnos den una solución determinada de antemano, “negocia las condiciones en las que se producirá [esa respuesta] y que la dotarán de sentido”, e intenta hacer las cosas de tal manera que ese sentido sea lo más rico y lo más exacto posible”, con lo cual se pierde el significado del conocimiento.

- Efecto Jourdain, o el malentendido fundamental

Es una forma del efecto Topaze, donde el profesor trata de evitar un debate o el fracaso de sus alumnos respecto al conocimiento, finge o admite

[...] reconocer como índice de un saber genuino (erudito), o de un modo de actuar auténtico, a una producción o un comportamiento del alumno que no es de hecho más que una respuesta que tiene causas (y significados) triviales y, por tanto, desprovista de valor e incluso, a veces, de sentido.

- El deslizamiento metacognoscitivo

Cuando una actividad de enseñanza ha fracasado, el profesor puede ser llevado a justificarse y, para proseguir su acción, a tomar sus propias explicaciones y medios heurísticos como objeto de estudio, en lugar del verdadero conocimiento matemático. Debido a la presencia de las dificultades, ese *medio* se vuelve a su vez objeto de enseñanza y se recarga de convenciones, de lenguajes específicos a su vez enseñados y explicados en cada etapa de difusión. En ese proceso, mientras la actividad de docente produce más comentarios y convenciones, menos pueden controlar los estudiantes las situaciones que les son propuestas. Tal efecto es el deslizamiento metacognoscitivo.

- El uso abusivo de la analogía

Si bien la analogía constituye un excelente medio heurístico cuando se usa bajo la responsabilidad de quien la emplea, en la relación didáctica es un temible medio para producir efectos Topaze. Sin embargo, resulta una práctica natural: si hay alumnos que han fracasado en su aprendizaje, hay que darles una nueva oportunidad en el mismo tema. Ellos lo saben, aun si el profesor disimula las similitudes para transportar (prefabricada) la solución que ya se les ha dado. Esta respuesta no significa que la encuentren idónea para la pregunta planteada, sino únicamente que han reconocido indicativos, quizá completamente exógenos y no controlados, que el profesor deseaba que produjeran. Obtienen la solución por una lectura de las indicaciones didácticas y no por un ataque al problema.

- Envejecimiento de situaciones de enseñanza

Los profesores suelen cambiar las situaciones de enseñanza por varias causas. Al estar conscientes de que, si reproducen la misma lección, no tendrá el mismo efecto, cambian al menos la formulación de sus exposiciones o de sus instrucciones, los ejemplos, los ejercicios y, si es posible, la estructura de la lección. Tales efectos aumentan con el número de reproducciones y son, por tanto, más fuertes cuando la clase comprende más interacciones entre el maestro y el alumno. Las lecciones que contienen una exposición seguida de ejercicios o una simple instrucción, a la cual prosigue una situación de aprendizaje que no exige intervención del profesor, envejecen menos rápido.

Dicho fenómeno, al igual que los precedentes, pueden observarse a nivel de una clase, pero también en el conjunto del sistema educativo, ya que los programas y las instrucciones ministeriales o los currículos son el medio casi único para explicar las exigencias didácticas del cuerpo social hacia los profesores y donde se decide la repartición de tareas entre ellas. Es necesario proponer algo para actuar sobre algunos fenómenos de enseñanza, pero primero hay que identificarlos y luego explicarlos.

A lo largo de este apartado, se han esbozado de forma muy breve y sencilla las aproximaciones teóricas que fundamentan este libro. Se destaca la necesidad de que la situación de aprendizaje propicie una serie de interacciones que favorezcan la comunicación y el intercambio de ideas (teoría de situaciones didácticas); también se aborda la comunicación de un saber a un público (los estudiantes), proceso que supone la transformación de ese saber en un conocimiento a enseñar y después en un objeto de enseñanza, en donde queda contemplada la transposición didáctica.

Este trabajo sobre fenómenos ligados con la actividad de enseñanza se basa fundamentalmente en observar y analizar las estrategias de los profesores de matemáticas en el nivel superior cuando pretenden, con las restricciones propias del funcionamiento del sistema didáctico, que los estudiantes comprendan la noción de variación.

Por tanto, el trabajo se sustenta en dos teorías: la de la transposición didáctica y la de situaciones didácticas. La primera nos interesa desde la perspectiva del saber,⁴ mientras que la segunda nos provee del sustrato situacional que caracteriza a

⁴ Se hace necesario estudiar las condiciones de los procesos de formación de conocimientos en los alumnos (las manifestaciones de comportamientos observables), en particular aquellos que pueden ser controlados o realizados por el maestro. *El objeto de la teoría de situaciones didácticas se ocupa, entonces, de investigar los modelos que relacionan a los estudiantes, el maestro, la concepción de la*

la enseñanza, ya que el saber enseñar se ve afectado por la acción didáctica es decir, cuando el maestro introduce una noción en su clase, ésta se modifica por la situación de enseñanza. Para nosotros, la localización y análisis de las transposiciones de tal naturaleza son parte del estudio.

materia a enseñar, las estrategias, la evolución. Y estas situaciones se dan en presencia del **saber** (una parte de teoremas matemáticos, acompañados de conceptos metateóricos); los **sujetos** (sus estados iniciales, metas, maneras de aprender, de evolucionar, entre otros aspectos) y los **medios didácticos** (el maestro, sus decisiones, el conjunto de estrategias de aprendizaje, los medios materiales).

Capítulo 4

Orientación Metodológica

1. Introducción

En la metodología etnográfica (Erickson, 1986; Rockwell, 1987), lo importante no sólo se refiere al hecho de observar, sino comprender los significados de las acciones vistas en el contexto histórico en que se desarrollan y a la luz de determinadas teorías sobre lo social. En nuestro caso entendemos por contexto histórico el espacio áulico donde el profesor explica, debate, socializa significados y comparte prácticas. En ese sentido no estudiaremos la concepción de un alumno sino la naturaleza de interacciones sociales que se viven con este fenómeno de enseñanza, lo social será entonces la forma de entender una particular interacción: *la explicación*.

Dada la posición teórica del trabajo, anclada en las situaciones didácticas (donde se destaca que la situación de aprendizaje propicie una serie de interacciones que favorezcan la comunicación y el intercambio de ideas, llevando a la construcción de un conocimiento) y la transposición didáctica (fenómenos ligados con su control, ya que a través de la relación didáctica entre el profesor y los alumnos el *saber enseñado* se convierte en *saber del alumno*), la perspectiva etnográfica resultó la más adecuada.

Se considera que la investigación debe instalarse en el salón de clase y efectuarse con métodos y técnicas de investigación cualitativa para percibir el acto de enseñanza en plenitud, tomando en cuenta que, idealmente, el aula es un espacio común para el entendimiento mutuo, para cierta construcción y negociación del conocimiento y para la formación de significados compartidos; en tal sentido, enseñar es fundamentalmente comunicar (Edwards y Mercer, 1987).

Desde la perspectiva de ver a la *enseñanza como un espacio de comunicación*, el medio que sirve de transporte para la mayoría de los aprendizajes que se dan en el salón de clase es el *discurso*. Las situaciones generadas en el aula están pobladas de

diferentes lenguajes, que unos emiten y otros intentan interpretar correctamente: esto es el *lenguaje sociocultural*. Al enfocar la enseñanza desde el punto de vista comunicativo, se recurre a una estrategia que puede resultar muy reveladora y útil para comparar las actividades educativas, al sugerir que se analice lo que se dice y cómo se dicen las cosas que se hacen en las clases. La metodología adecuada, se reitera, es la *etnográfica*.

La intención ha sido localizar y analizar las maneras en que se introduce y desarrolla la noción de variación en situación de enseñanza, sobre todo en la de la matemática superior, cuando un profesor pretende (con las restricciones propias del funcionamiento del sistema didáctico) hacer ver entre sus estudiantes la idea de variación. De acuerdo con nuestra perspectiva, la enseñanza, si bien es dirigida por el maestro, la influencia de los alumnos será decisiva para muchas de las acciones que emprenda al enseñar.

De este modo, la estrategia general tiene como meta *la comprensión del complejo y rico entramado de pautas de interacción que se dan para producir conocimiento entre docentes y alumnos* Candela (1999). Para ello, la atención se centra en la noción de variación, considerando la perspectiva de quienes conforman una comunidad (profesor, alumnos, saber); en este caso, fueron elegidos profesores en condiciones *normales* dentro de un salón de clase y se puso atención especial en la influencia generada por los alumnos.

La información que se recabe deberá analizarse *desde dentro*, lo cual implica no aplicar a la interpretación marcos fijos o predeterminados, sino obtener de los individuos algunos elementos que permitan entender los acontecimientos *desde la perspectiva de los sujetos involucrados*. Cabe mencionar que la investigación de campo interpretativa exige ser especialmente cuidadoso y reflexivo, para advertir y describir los hechos cotidianos en el escenario de trabajo, así como para tratar de identificar el significado de las acciones desde los puntos de vista de los propios actores (Wittrock, 1990).

2. La etnografía

Objetivo perseguido y elementos de análisis del estudio

La etnografía educativa se ubica en una línea de investigación cualitativa para el análisis de la realidad escolar, busca comprender e indagar con mayor profundidad en los significados y sentidos presentes para los actores dentro de una situación educativa. En forma central, se dirige al conjunto de hechos que ocurren en la práctica diaria entre maestros y alumnos y, a partir de ellos, se estructura la investigación.

Debido a que las relaciones cotidianas en el aula se rescatan como elementos vertebrales de análisis, el concepto de *vida cotidiana* adquiere el carácter de categoría

de estudio permanente en cada uno de los trabajos. La vida cotidiana aparece conceptualizada como el entorno en el que se desarrollan, en forma común, las relaciones entre los sujetos, como la sucesión de actos, fenómenos y relaciones que enfrentan los sujetos sociales y, al mismo tiempo, permiten la formación del hombre como sujeto social.

La vida cotidiana (Hammersley & Atkinson, 1994) entre maestros y alumnos transcurre en el aula como ambiente inmediato; aquí se desenvuelven como sujetos y establecen diferentes tipos de comunicación, *tanto verbal como simbólica*. Reconocer las características, tipos y contenidos de esta relación constituye el objetivo hacia el que se dirigen las investigaciones etnográficas. La mirada etnográfica, surgida en el estudio antropológico de culturas orales, tiene como fin consignar lo no documentado de la vida escolar, como lo llamó Rockwell (1996) y mirar a las escuelas y sujetos singulares para hacer visible y comprensible, a esta escala, lo que desde otras (sistema escolar, institución) es ignorado, supuesto o deducido. La etnografía de la práctica docente y escolar busca, en buena medida, analizar el conocimiento cotidiano de los actores de la educación para comprender mejor la enseñanza.

En Woods (1998), la etnografía se refiere como un término que deriva de la antropología y significa literalmente *descripción del modo de vida de una raza o grupo de individuos*. Se interesa por lo que la gente hace, cómo se comporta e interactúa, y se propone descubrir sus creencias, valores, perspectivas, motivaciones y el modo en que eso se desarrolla o cambia con el tiempo, o de una situación a otra. Y trata de hacerlo desde *dentro* del grupo y de las perspectivas de los miembros del grupo, lo que cuentan a través de sus significados e interpretaciones. Por ello, hay que aprender su lenguaje y costumbres con todos los matices.

Así, el objetivo central que dirige los trabajos educativos etnográficos consiste en *develar*, descubrir o hacer evidentes las prácticas cotidianas a las que ordinariamente se enfrentan maestros y alumnos: Impulsa en este trabajo la necesidad de acercarse a la realidad escolar y especialmente a la interacción en el aula. En este sentido, lo que realmente sucede en la práctica diaria de las relaciones escolares adquiere especial importancia en el enfoque de la investigación cualitativa.

Tal objetivo se va consolidando a través de la técnica de observación directa sobre el diario acontecer de la escuela y del aula, tratando de describir en forma detallada todo un conjunto de situaciones particulares, sentidos, contenidos y modalidades que caracterizan a las relaciones establecidas en el salón de clase. Para el trabajo etnográfico, la observación directa, los estudios de caso o de vida y las entrevistas son elementos que permiten al investigador recolectar datos desde las interrelaciones. Con la información se organiza una descripción analítica de los *sucesos, fenómenos e interacciones humanas*.

Un elemento particular de la etnografía educativa es que se asume como un enfoque que permite “ir construyendo” su propio camino de conceptualización de un fenómeno, ya que a partir de *un acercamiento directo al espacio escolar se derivan las categorías de análisis*, que imprimen una estructura crítica a la investigación.

2.1. Organización del trabajo de campo

La etnografía no mantiene un proceso idéntico en todos sus estudios, ha seguido caminos muy diversos, según el objeto de estudio y el sujeto que investigue; su metodología se construye al mismo tiempo que el objeto de estudio. Podemos explicar tal hecho a través de estas consideraciones:

▶ Es cierto que no se determinan de antemano ciertas categorías específicas, pero también que el investigador siempre identifica los aspectos conceptuales de interés para su trabajo antes de entrar en el lugar. Dada la perspectiva amplia que adopta al principio, se puede creer que este proceso consiste en “observar sin ninguna concepción previa”, mas sería una caracterización engañosa. Las concepciones previas y las preguntas orientadoras están presentes desde el principio; sin embargo, en ese momento el investigador no presume saber adónde podrían llevarlo las preguntas iniciales y, en consecuencia, empieza por realizar el muestreo más amplio posible del contexto y sus ambientes circundantes (Erickson, 1986).

▶ En Rockwell y Mercado (1987) se afirma la pretensión de un empirismo radical que propone un acceso ateórico, directo, a la realidad. Pero es posible plantear otra forma de concebir la relación entre teoría y el proceso de investigación etnográfica: durante el trabajo de campo y de análisis, resulta necesaria la construcción de categorías y de relaciones conceptuales que permitan articular la descripción de una realidad específica.

▶ La aceptación de que el fenómeno educativo es complejo, de tal forma que resulta complicado captar en su totalidad las relaciones y efectos que tienen lugar en el proceso educativo.

La etnografía, como método, resulta particularmente útil para el estudio de las interrelaciones en el aula, ya que presupone una observación detallada y una estancia detallada y prolongada en el ambiente natural de la enseñanza, lo cual permite al investigador adentrarse en la cultura de esos microcosmos, conocerla y luego describirla. De ahí que sea un trabajo cualitativo por su orientación a la explicación y sobre todo a la interpretación del objeto de estudio, caracterizándose, entre otras cosas, porque no intenta crear hipótesis que se comprueban en la medición del aprendizaje.

El supuesto teórico de la etnometodología consiste en que la realidad no se descubre, sino que se interpreta, es decir, se construye, negocia y mantiene a través

de las interrelaciones de los participantes. Como tiene muchas variantes, se eligió como estudio de caso, la investigación a profundidad de las interrelaciones que ocurren en el salón de clase; además, se consideró que un modelo cualitativo, con un método etnográfico y la observación como técnica, resulta el más adecuado para caracterizar los procesos de la práctica docente.

La etnografía requiere de cierta disciplina en el registro de campo, porque la precisión y la textualidad de lo que se apunta y transcribe deben anteceder a los filtros evaluativos y sustituir la clasificación inmediata de lo observado (Rockwell, 1987). El etnógrafo educativo se basa en la recogida de datos de la escena del salón de clase para su análisis e interpretación; la elaboración de notas de lo observado, así como la grabación de las clases -ya sea en videocasete- es una herramienta útil para acercarse a la realidad de la enseñanza. Asimismo, observa e interpreta paralelamente, selecciona lo significativo del contexto con relación a la abstracción teórica que realiza al mismo tiempo, lleva a cabo múltiples análisis, reinterpreta, formula nuevas hipótesis, construye el contenido de los conceptos iniciales, no lo presupone. El trabajo teórico proporciona, entonces, las categorías necesarias para tornar nuevamente observables los indicios preliminares, para abrir la “mirada”.

Según Rockwell (1994), la etnografía constituye una de las muchas formas de investigación cualitativa que se usan en el campo educativo. Sin embargo, no es propiamente un método, a veces requiere de varios y siempre ha importado técnicas de otras disciplinas, desde la demografía hasta la lingüística. Entonces, ¿qué la distingue de otras maneras de investigar? Posiblemente, dos características:

- a) Un trabajo de campo marcado por “el diálogo con el otro”
- b) La elaboración de textos descriptivos y narrativos

Todos tienen presente la primera condición, pero a menudo se olvida la segunda. En la primera se centran las clásicas discusiones acerca de la objetividad, validez y representatividad de los estudios etnográficos frente a otras opciones de investigación. Pero en la segunda se centran los debates actuales: ¿cómo describe el autor la experiencia de campo?, ¿cómo puede la construcción narrativa y argumentativa de un texto mostrar lo que el autor vio o escuchó? De hecho, el trabajo de campo y la producción de un texto etnográfico están vinculados con la actividad básica de escribir.

En la educación, los trabajos etnográficos han abierto la posibilidad de hablar sobre procesos que habían quedado relativamente ocultos en la “caja negra” de la institución. A partir de ellos se empieza a comprender cómo realizan su trabajo los maestros y los estudiantes, al acercarse a la realidad escolar cotidiana se alteran concepciones vigentes acerca del contenido y las condiciones del oficio magisterial (Rockwell, 1994).

Una investigación de corte etnográfico abarca básicamente seis etapas:

- ▶ Recopilación de datos (observación en la situación de campo)
- ▶ Elaboración de los registros de la observación (toma de notas y confección de toda clase de evidencia documental)
- ▶ Análisis e interpretación de resultados
- ▶ Síntesis e interpretación global (reunión del material de cada aula investigada para establecer generalizaciones)
- ▶ Integración de productos de la investigación (selección de los puntos clave que merecen destacarse)
- ▶ Redacción del informe correspondiente

▶ *Recopilación de datos*

Consiste en el registro minucioso de los sucesos del aula, así como de la ubicación y distribución de los participantes. Durante el transcurso de la clase, el investigador toma notas de sus aspectos observables sin hacer ninguna interpretación, consigna fielmente los intercambios verbales entre los participantes y demás sonidos que se produzcan con el fin de reconstruir las situaciones observadas.

▶ *Elaboración de los registros de la investigación*

En esta etapa se transcribe el material grabado en forma directa para integrar, junto con las notas de campo o la bitácora de clase, los registros de la investigación. Un formato adecuado consiste en transcribir los datos a manera de diálogo, tratando de reconstruir en el texto cada una de las situaciones presentadas al momento de la observación. Tal proceso adquiere de gran importancia, ya que un buen registro facilita el análisis e interpretación de los datos.

Asimismo, se necesita idear estrategias tanto para registrar periódicamente la hora como para abreviar la tarea con claves de identificación de los participantes y de repetición de ciertos patrones de comportamiento.

▶ *Análisis e interpretación de resultados*

El análisis e interpretación se realiza a partir de los registros de la observación y requiere de un proceso concienzudo y reflexivo, ya que trata de identificar el significado de las acciones, desde los puntos de vista de los participantes. Dicha tarea se estructura desde categorías que, a su vez, se enmarcan en enfoques que permiten aproximarse, desde este momento, a la obtención de productos de la investigación.

▶ *Síntesis e interpretación global*

Tras haber analizado e interpretado los resultados, hay que sintetizar los hallazgos

y llegar a la generalización de resultados. Esto se efectúa sólo cuando se supera el diseño etnográfico original que, por sí mismo, ofrece limitadas posibilidades en tal sentido.

Así, se toman los resultados de cada caso estudiado y se lleva a cabo un trabajo delicado y ético de integración-generalización de constantes, patrones de comportamiento, características, etcétera, que conviertan los resultados en un todo indiferenciado, pero útil y necesario para definir la cultura del tipo de profesor o el tipo de aula investigada.

► *Integración de productos de la investigación*

Una vez obtenida la síntesis, hay dos tipos de trabajo: se aíslan los productos de la investigación, o bien se construye un apartado donde se enfatiza en los valores encontrados, útiles para modelar en la enseñanza. A este apartado se le denomina discusión de resultados.

► *Redacción del informe correspondiente*

El último paso ocurre cuando se redacta el informe (o los informes) y se presenta a las autoridades administrativas y/o ante la comunidad académica. El informe consta de un documento base y de una serie de anexos que engloban todo el trabajo de investigadores y asistentes; finalmente, se pueden tomar decisiones de organización, administración o diseño de las tareas docentes con base en los resultados.

En la investigación cualitativa, es importante señalar los procedimientos generales para recabar la información y la lógica que sustenta nuestro estudio. Al intentar responder al problema de investigación, se ha concebido que la enseñanza es dirigida por el maestro; sin embargo, la influencia de los alumnos será decisiva para muchas de las acciones que lleve a cabo al enseñar.

3. Escenario de interés y participantes en el estudio

Las actividades en el aula incluyen diálogos que generan oportunidades para aprender, pues los estudiantes deben verbalizar y reconstruir sus soluciones y resolver conflictos. Para poder iniciar tal clase de instrucción, el profesor y los estudiantes necesitan definir mutuamente las expectativas y obligaciones en el salón, de ahí que la *comunicación interactiva* constituya la actividad medular de la enseñanza y tenga sus metas. Por las características de las acciones educativas en que participan los profesores del nivel superior, hay un tipo que resulta fundamental para nuestra investigación: clases normales y cotidianas.

De este modo, el trabajo se llevará a cabo tomando en cuenta la actividad cotidiana en el aula de un primer semestre de Ingeniería. Para ello, fueron seleccionados profesores que se dedican, principalmente, a impartir clases.

Participantes en el estudio

Los *profesores*, son elementos de suma importancia al ser los portadores del saber que habrá de escenificarse en el aula. Los participantes fueron tres maestros que imparten la asignatura de Matemáticas I, en las diferentes carreras de una Escuela de Ingeniería, esa materia forma parte de un tronco común. A ellos se les eligió aleatoriamente entre los docentes que ofrecen dicho curso.

Se platicó con cada uno de los profesores y se les pidió autorización para observar y registrar la manera en que daban los conceptos de función y derivada: los tres estuvieron de acuerdo. Se hicieron las observaciones durante un periodo largo, sólo durante las clases en que se impartían los conceptos de función y derivada, ya que son vistos como modelo para el estudio de la variación.

4. Fuentes de aportación de la información

La información se recabó mediante las observaciones sobre las actividades en el aula, bajo condiciones normales. Fue necesario que registráramos las clases en audio, además de elaborar las notas de campo, lo cual nos permitirá contar con una fuente de datos para:

- Obtener información que ilustre lo que sucede en el salón de clase, bajo condiciones “normales”
- Lograr un acercamiento con los profesores y con el grupo, pero sin provocar modificaciones importantes en sus formas cotidianas de trabajo y de relación. Esto nos facilitará tener registros reales
/ Comprender las formas de actuar de los profesores en las actividades educativas
- Recabar información de lo que sucede en la interacción social, esto es, en el proceso educativo donde participan los profesores y los alumnos
/ Contar con elementos de interpretación de los acontecimientos, *desde la perspectiva* de los sujetos bajo estudio
- Asimilar lo que sucede en los procesos educativos donde participan los profesores.

Las observaciones de las clases fueron consignadas a fin de [...]

[...] reconstruir los aspectos no documentados, rescatar lo cotidiano, lo inconsciente, lo oculto de la realidad escolar (Candela, 1991).

[...] diseñar “registros que permitan reconstruir lo observado a la luz de conceptualizaciones posteriores más elaboradas que las que surgieron en el momento inicial de la investigación (Rockwell, 1987).

Posteriormente, transcribimos por completo los registros de clase.

Fases de la investigación

El estudio, en su conjunto contempla estas fases:

- ▶ Acercamiento y delimitación del problema
- ▶ Trabajo de campo
- ▶ Descripción
- ▶ Interpretación y comunicación de resultados

Concebimos estas fases no como una secuencia lineal, ya que cada una enfatiza una cuestión peculiar, pero siempre haremos regresos constantes a las etapas fases previas con el propósito de revisarlas.

▶ Acercamiento y delimitación del problema

Esta fase se desarrolló en tres rubros:

- Revisión de trabajos previos a nuestra investigación: estudios sobre profesores (perspectiva general), sobre profesores, considerando un contenido matemático, y algunos que aportan algunos resultados, análisis o experiencias con estudiantes donde se atiende, de alguna manera, a la noción de variación, así como investigaciones sobre el discurso en el aula.
- Examen de teorías acordes con nuestra investigación
- Búsqueda y reflexión de la metodología adecuada

▶ Trabajo de campo

El estudio definitivo comprendió una investigación de corte etnográfico que abarcó seis etapas:

- Obtención de datos (observación en la situación de campo)
- Elaboración de los registros de la observación (toma de notas y confección de toda evidencia documental).

Formato para registro de la observación

Variación: fenómeno de envejecimiento de las situaciones de la enseñanza

Clave de la observación Fecha: Página:

Hora	Palabra clave	Comentarios

- Análisis, descripción e interpretación de resultados
- Síntesis e interpretación global (integración del material de cada aula investigada para establecer generalizaciones).
- Integración de productos de investigación (selección de los puntos clave que merecen destacarse)
- Redacción del informe

► Descripción particular y general

Como éste es el núcleo del informe de una investigación de campo, la descripción general que acompaña a nuestro trabajo suministra pruebas de la frecuencia relativa de oposición a un fenómeno dado

► Interpretación y comunicación de resultados

Esta fase comprenderá acciones encaminadas a establecer vínculos clave entre diversos datos (unidades de análisis y categorías de interpretación), mientras que el comentario interpretativo aparecerá de tres formas: una interpretación que precede y sigue a cada descripción particular en el texto, y una discusión teórica que apunta a la significación más general de los patrones identificados en los acontecimientos mencionados. Esta descripción se apoyará en las transcripciones de los registros que se audiograbaron), con el objetivo de identificar algunas regularidades en el contexto del aula y en las situaciones de enseñanza donde interviene la noción de variación.

Capítulo 5

La variación y las explicaciones didácticas de los profesores

En los estudios cualitativos, a diferencia de los cuantitativos, el análisis de datos no tiene vías de salida muy definidas, como la aplicación de un método o de algoritmos de procesamiento a los datos recopilados. Una de las dificultades radica, precisamente, en la determinación de un método.

La estrategia de análisis implica un proceso continuo de los datos a la conclusión y viceversa. Aunque esto pareciera inagotable, llega a su término cuando se detectan concordancias o asociaciones significativas entre los datos, pero sobre todo cuando se aportan nuevos elementos para entender la situación. Dicho análisis requiere de múltiples lecturas sobre los registros con la finalidad de hallar el sentido que tienen las acciones para los participantes.

Para organizar los datos, consideramos pertinente determinar una serie de temas comunes en cada caso, a fin de hacer homogénea la información recolectada, en el sentido de que aportarán elementos en direcciones similares, aunque no necesariamente con el mismo matiz o énfasis. Esto no sugiere categorías de análisis, sólo se hace referencia a un proceso de *reducción de datos*. Las categorías de análisis surgirán después de visualizar relaciones y encontrar nexos entre diversos aspectos. Algunos de los detalles presentados pueden considerarse irrelevantes en el contexto del problema de investigación; sin embargo, su utilidad será mejor valorada cuando se intenta tener una imagen, lo más completa posible, del docente y, por supuesto, de su actuar en el salón de clase.

Atendiendo el objetivo de la investigación, en este capítulo se presentan los análisis y la discusión del trabajo con los tres profesores seleccionados para desarrollar el trabajo, lo cual implicó que elaboráramos interpretaciones y estudios en direcciones específicas. Sobre los momentos abordados, decidimos atender a las situaciones que se repiten y que permiten inferir algunas reglas de la interacción,

así como recoger y analizar otras de excepción, como también se señala en Candela (1999).

A partir de los datos recolectados se produjeron diversas formas de reducción. Por ejemplo, se agruparon aspectos relacionados con la gestión escolar y que posteriormente se volvieron a conglomerar en torno a los matices sobre diversos temas; así, de manera sucesiva, se construyeron nuevas formas de agrupación. Se organizaron cada una de las agrupaciones con la intención de construir una visualización general que nos permitiera hallar relaciones entre los datos y definir nuevas formas para jerarquizar la información. Tal perspectiva ofrece una visión de conjunto de los datos que apoya la generalización de las conclusiones. Una reseña detallada del proceso sería excesiva, sobre todo porque en su heurística se logran caminos correctos, pero también hay erróneos.

Bajo la premisa de que el discurso es un medio para estudiar las prácticas sociales, en esta investigación interesó ahondar tanto en las características de una sesión de clase como en los recursos o elementos discursivos de los profesores cuando enseñan una noción compleja como la de variación, sin dejar de lado la participación de los estudiantes. Los datos fueron recolectados mediante observaciones y grabación en audio de las clases que luego fueron transcritas. Para el análisis se tomaron fragmentos de las conversaciones antes descritas donde se encontraban las descripciones más ricas en información, con ejemplos formulados tanto por los maestros como por los alumnos.

1. Las explicaciones en la clase de matemáticas

Si se concibe a la enseñanza como un espacio de comunicación, el discurso constituye el vehículo que transporta la mayoría de los aprendizajes surgidos en el salón de clases, cuyos aspectos están poblados de diferentes lenguajes que unos emiten y otros intentan interpretar correctamente. Idealmente, el aula es un espacio para el entendimiento mutuo, para cierta negociación de conocimientos y para la formación de significados compartidos: en tal sentido, enseñar consiste fundamentalmente en comunicar (Edwards y Mercer, 1987). Dicho enfoque sugiere que se analice aquello que se dice y cómo se dicen las cosas dentro de la clase. Al considerar al discurso como un medio para estudiar las prácticas sociales (Candela, 1999), partimos de que el discurso en el aula tiene una organización explicativa, ya que toda intervención se puede ver orientada hacia la comprensión de alguna idea, noción o concepto.

Para estudiar el *discurso de los profesores* resultó conveniente prestar atención a algunas situaciones del aula donde se empleaba una serie de explicaciones didácticas (en el sentido de Sierpinska, 1994) y de recursos discursivos para hacer asequible

la noción de variación. Por ello, se analizaron el papel de las acciones explicativas en la construcción de significados y la forma y situaciones en las que los profesores hacen uso de este recurso.

Sin embargo, también nos interesó abordar la construcción de recursos discursivos para estructurar la explicación en el aula e indagar su papel en la construcción del conocimiento. Consideramos que uno de los objetivos del docente es que los estudiantes comprendan los conocimientos matemáticos o el saber que enseña y, entre las estrategias que lleva a cabo, figuran las *explicaciones*. La *explicación* engloba a aquellos recursos discursivos que tienden a comprender una noción, idea, hecho, objeto o fenómeno, y van más allá de una descripción, pues tratan de encontrar sus causas o vías para entenderlos. No sólo genera una actividad reflexiva, sino también es un medio explícito que dispone el profesor o el estudiante para unir o enlazar ideas. Da una o más razones para volver comprensible un dato, fenómeno, resultado o comportamiento (Duval, 1999).

El profesor asume explícitamente la responsabilidad de “hacer comprender” y de establecer vínculos con sus alumnos a través de las explicaciones, que pueden tener diversos *status didácticos*: simples comentarios, ilustraciones, soluciones de problemas, demostraciones, entre otros. Por otra parte, nos interesa poner en tela de juicio la concepción de que en el salón de clases los discursos son autoritarios y los formatos comunicativos que usa el docente se caracterizan por su rigidez y poca reflexión, sin atender a la manera en que llega la información a los alumnos. Esto se debe a que los conocimientos ya están acabados y son congruentes con los planes de educación superior, de ahí que al docente se le atribuya la autoridad de ser el *conocedor de la verdad*. Empero, veremos las explicaciones del docente y cómo son modificadas cuando hay una interacción discursiva con los alumnos.

La explicación es uno de los medios que emplea el profesor para hacer comprender o “dar sentido”; constituye el objeto de una comunicación, un debate o una discusión. De igual manera, puede aparecer como una comunicación de información útil o como un medio que facilita rápidamente una comunicación o argumentación, parece estar ligada al razonamiento (Duval, 1999) y su objetivo es hallar el entendimiento (Sierpinska, 1994).

Sierpinska hace una diferencia entre las explicaciones científicas y las explicaciones didácticas. El objetivo de las primeras es lograr el entendimiento de las bases más conceptuales -por ejemplo, de una teoría matemática abstracta-, mientras que las segundas se dirigen a un entendimiento con bases más familiares (una imagen, algún conocimiento previo o experiencias) y frecuentes en la enseñanza. Como el rol de la explicación es volver asequible el sentido de un objeto (ya sea método, término o enunciado), constituye el medio que utilizan el docente y

los estudiantes para mostrar o investigar la comprensión. Sus objetivos son variados: enseñar, convencer, requerir un orden u obtener una ventaja.

Puede observarse que los docentes, a menudo, promueven la generación de explicaciones cuando demandan a los alumnos que justifiquen o expongan sus puntos de vista.

Estas explicaciones -que pueden aparecer en el discurso del profesor o en el del estudiante, en una comunicación, en una discusión o debate-, son necesarias para el avance de la situación didáctica, pero también pueden ser una exigencia arbitraria y formal del profesor, quien impide el desarrollo natural del proceso por los comentarios que da o impone. Ahora bien, las diversas funciones de la explicación permiten identificar y clasificar sus ocurrencias en las transcripciones y en los registros de las lecciones. Los estudiantes necesitan de una explicación que les permita identificar los hechos y comprenderlos.

Enseguida se analizan las explicaciones dictadas por el maestro sobre la noción de variación y cómo se desarrollan durante la interacción. Afirmamos que, en tal entorno, el profesor, aunque enseña, está influenciado por el alumno.

1.1. Las explicaciones didácticas de los profesores: la variación

En este capítulo interesa mostrar cómo aparece la noción de variación en la enseñanza y cuál es su desarrollo en el proceso de negociación de significados del discurso en el aula. Sierpinska (1994) y Mopondi (1995) apuntan que las explicaciones didácticas son aquellas que ofrece el profesor (o el alumno) y se dirigen a un entendimiento con bases más familiares y frecuentes en la enseñanza. Dan una o más razones para volver comprensible un dato, fenómeno, resultado, o comportamiento (Duval, 1999).

En el salón de clase hay diversas alternativas para abordar los temas trabajados, de ahí que tanto el profesor como los alumnos traten de construir sus versiones sobre el contenido escolar. Aquí, los participantes aportan sus explicaciones para entender y poder orientar los acuerdos sociales.

Ante la pertinencia de distinguir las formas de explicación que pueden tener consecuencias didácticas en la construcción del conocimiento, a través del discurso escolar, al apreciar en el interior de cada una de las clases, los recursos utilizados por el profesor, sin dejar de lado las contribuciones de los alumnos, y su efecto en la construcción del conocimiento.

Para estudiar los recursos o elementos discursivos de que se valen los profesores al abordar la noción de variación, dirigimos el análisis hacia las situaciones donde explican con claridad sus diferentes temas de estudio, *función* y *derivada*; también atendimos a las explicaciones de los alumnos, sus demandas de una

mayor exposición y cómo se modifica la explicación durante la interacción. Para ello, se optó por enfocar la atención en el papel de las explicaciones durante la clase de matemáticas, cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados con la variación.

De este modo, se identifican las explicaciones didácticas, los elementos discursivos y la negociación de significados a los que recurre el profesor, tomando en cuenta que el discurso matemático escolar en el salón de clases proporciona un escenario para el maestro y los alumnos a fin de que representen, piensen, hablen, estén de acuerdo o no. Aquí se sugiere un análisis sobre qué y cómo se dicen las cosas durante la clase, bajo la premisa de que el discurso en el aula tiene una organización explicativa, ya que toda intervención se puede ver orientada hacia la comprensión de alguna idea, noción o concepto.

Un primer asunto de interés, consistió en explorar las ideas que tienen los docentes sobre la noción de variación, con base en las explicaciones que formularon en el salón de clase y cómo se modificaron en la interacción discursiva para llegar a acuerdos entre ellos. Algunas secuencias discursivas fueron cortas y otras un poco más largas; sin embargo, como la interacción que se da en el aula hace complicado recortar y elegir sólo la explicación del docente, resultó muy difícil mostrar ejemplos de todos los puntos considerados.

En las explicaciones que formulan los profesores, la noción de variación (categorías de análisis) desempeña los siguientes papeles:

- Cuando emplean a la tabulación como variación numérica
- Al momento de construir gráficas como la variación de un punto de referencia
- En sus expresiones verbales con referencia a situaciones cotidianas
- Mediante el empleo de parámetros como variables principales
- En los casos donde la derivada es vista como co-variación o comparación a/b

1.1.1. Cuando emplean a la tabulación como variación numérica (explicación usando la tabulación)

Se ilustra con algunos ejemplos de las explicaciones didácticas en las que aparece la variación numérica, donde se ve que la **tabulación** es ligada con varias situaciones:

- Relación entre conjuntos
- Explicaciones por medio de un ejemplo
- Comportamiento
- Puntos intermedios
- Aproximación
- Rotación
- Crece o decrece

- *Relación entre conjuntos y la tabulación*

La explicación encontrada en los libros de cálculo sobre la definición de función es conjuntista; se circunscribe a la relación o la regla de correspondencia entre dos conjuntos. En el siguiente extracto veremos que la explicación del profesor se da a través de la relación entre conjuntos, pero ilustra puntos y números, creando una primera idea que conduce a la tabulación; aquí, el docente se auxilia de un modelo figurado que ocupa conjuntos. Sin embargo, menciona que otra manera de establecer una relación entre los dos conjuntos es mediante ecuaciones.

Extracto 5.1

P: ...Las maneras en que nosotros podamos establecer la relación entre esos dos conjuntos son diversas. Las que más vamos a trabajar nosotros son aquellas que están establecidas a través de ecuaciones y las podemos hacer de diferentes formas... La vez pasada escribí algunos conjuntos pequeñitos con algunos elementos; por ejemplo, ponía 1, 2, 3, 4, y le llamábamos X y a ese \mathcal{Y} dentro de \mathcal{Y} había escrito 1, 4, 9 y 16. Entonces la pregunta es si existía alguna relación entre ese conjunto de números...

Am: ¡Ajá!

P: ¿Cuál era?

Am: La \mathcal{Y} .

P: O sea que los que encerramos en \mathcal{Y} ¿qué son?

As: [...]

P: Si lo manejamos así si lo establecemos así, entonces la correspondencia sería...

As: El 1 con el 1

P: El 1 con el 1.

Am: ¡Ajá!

P: El 2 con el 4, el 3 con el 9, el 4 con el 16, ¿no? Entonces, si nosotros se lo establecemos así, si hablamos en general de X y el \mathcal{Y} lo tenemos acá, si lo queremos establecer en \mathcal{Y} ¿qué sería?

Am: X al cuadrado, $(x^2 \Rightarrow y)$: Daría x^2 . Entonces, lo tenemos como una relación entre dos variables, como una ecuación, donde esas variables las manejamos como... ¿ X que nombre recibe? ¿ Y en \mathcal{Y} ?

Am: Variable independiente

P: En X es la variable independiente, mientras que \mathcal{Y} ...

Am: Variable dependiente

P: La variable independiente ¿verdad? Mientras que \mathcal{Y} , la variable es dependiente.

Am: La variable dependiente

P: Si, la variable dependiente es lo que vamos a llamar la función, ¿verdad? Si

nosotros lo escribimos así, lo tenemos como una relación entre dos variables en notación funcional.

B (Gpo-1), p. 3.

El profesor Bruno demanda que sus alumnos desglosen su opinión y, a través de las preguntas, se propician intervenciones explicativas de los estudiantes, quienes así demuestran sus conocimientos del tema. Podemos ver que el profesor utiliza la opinión de la mayoría; por ejemplo, “*El 1 con el 1 (a coro)*”. De este fragmento se puede constatar que se está haciendo una tabulación, esto es, variación numérica donde el número ordena puntos. El profesor explica la relación entre dos variables y lleva a los alumnos a que busquen su función correspondiente: sigue usando el modelo figural, para la una función cuadrática $y(x)=x^2$.

- *Explicación por medio de un ejemplo y la tabulación*

Ahora daremos un ejemplo de una explicación en la que aparece la tabulación:

Extracto 5.2

P: La forma más simple para trazar una recta $y=2x+3$, se necesita, ¿qué cosa?
¿Cuál es el requisito mínimo para trazarla?

Am: Dos puntos

Am: Que tenga dos puntos

P: Dos puntos. Entonces, según el axioma de la geometría, para trazar una recta es suficiente tener dos puntos. Y para un plano, ¿cuántos puntos se necesitan?

Am: ¿Para un qué?

Am: Cuatro.

P: Un plano.

Am: Cuatro.

Am: Tres.

P: Tres puntos definen un plano, dos son suficientes, para trazar una recta. Yo no puedo trazar una recta si no tengo dos puntos, con uno no puedo hacer nada; un plano requiere de tres. Necesito dos puntos para trazar la recta, y los más simples para trazarlos son donde cortan el eje de las X ; es decir, cuando X vale 0, ¿Cuánto vale Y ?

As: 3

P: ¿Cuándo Y vale 0 cuánto vale X ?

Am: 2

P: ¿Cuánto dijeron?

Am: ¿Cuándo X vale cuánto?

P: Cuando X vale 0, Y vale 3, ese es uno. Cuando Y vale 0 ¿cuánto vale X ? ¿Vieron de dónde lo sacamos?

As: ¡Sí!

P: ... No necesita ser tanto, simplemente dos puntos son suficientes para cruzar la recta, ¿Cuáles? los que cortan el eje de las X [...] si no lo entendieron [...] si alguno de ustedes dice, bueno pues yo no le creo mucho al maestro, pero mejor voy a hacer mi tablita, pueden hacer la tabulación y ya pueden trazar $y=2x+3$.

A (Gpo-1), p. 21.

En esta sesión el docente ofrece una explicación de la función constante, lineal y de la cuadrática en forma polinomial de cada una de las funciones. Luego sugiere un ejemplo de la función lineal $y=2x+3$ y pregunta a los alumnos cual es el requisito mínimo para trazarla. Ellos responden que dos puntos.

Para localizar un punto en el plano se necesitan dos números. Sabemos que cualquier punto puede representarse como un par ordenado (a, b). El docente pregunta: “¿Y para un plano cuántos puntos necesito?” Un alumno responde por medio de otra pregunta: “¿Para un qué?”, demandando una explicación; sin embargo, otro alumno responde que tres puntos. El profesor sugiere a la tabulación como un medio para validar la gráfica, ya que afirma que dos puntos son suficientes para trazarla, pero pone en duda su explicación cuando les dice a los alumnos que, si no lo entendieron o no le creen, que hagan la tabulación. El profesor justifica los resultados o el método empleado (el cual va a institucionalizar) e intenta validarlo.

La explicación del maestro usa el modelo de la tabla de valores, donde se muestra la relación que hay entre dos cantidades. La noción de variación que se puede ver, durante la clase es la numérica; el modelo o representación es la tabla de valores y, por último, se aborda el modelo geométrico. Aquí se aprecia una situación didáctica en la que se dan un conjunto de relaciones, surgidas al interior del salón de clase, entre el docente, los alumnos y el conocimiento. Dichas relaciones son las que interesan en este estudio pues son del tipo explicativas, el profesor explica al alumno con base en el *milieu*, haciendo uso de todos los elementos a su alcance, en este caso el modelo de la tabla de valores aunado al modelo geométrico de la recta. Este hecho, será una característica notable en el fenómeno de envejecimiento. Se acude a los recursos disponibles intentando cambiar la explicación.

- *Comportamiento y la tabulación*

El docente explica las funciones racionales y luego sugiere que se haga una tabulación para ver el comportamiento de la recta. Tal estrategia tiene suma importancia, ya que se está manejando el comportamiento de la función.

Extracto 5.3

P: Miren sí esa expresión se puede dar, fíjense bien, es lo mismo lo que está aquí es exactamente lo mismo. Si yo tuviera: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$, digo $\frac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 3)}$ esto es igual a $x - 3$ para $x \neq -3$. Estoy haciendo lo mismo; significa exactamente lo mismo. Y esto, ¿qué cosa es?

Am: Una recta

As: ¡Eso es una recta!

P: O sea esto es exactamente una recta, ¿no lo quieren creer? Podríamos hacer una breve tabulación para ver más o menos su comportamiento; por ejemplo, yo le puedo dar algunos valores para observar más o menos ¿sí?, dice que excepto para -3 . Entonces, yo le puedo dar cualquier valor, como $-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Esos son algunos valores que puedo darle... vean ustedes lo curioso de la gráfica de esta recta. Cuando dice $y = x - 3$, entonces -4 serían $-7, -5, -2, -1, -4, -3, -2$, ¿verdad?, -1 .

Am: 0

P: 0 ¿verdad? Con eso ya tenemos una idea de cómo está la gráfica.

A (Gpo-1), p. 33.

El profesor pregunta a los alumnos, después de la simplificación, qué les resultó: “*Y esto ¿qué cosa es?*” Los alumnos identificaron rápidamente que se trata de una recta. Enseguida utiliza esta respuesta para hacer su comentario y llevarlos hacia la tabulación.

Con la tabla de variación numérica se tendrá una idea sobre el comportamiento de la gráfica; dicha expresión puede notarse en el último turno de la secuencia. Podemos ver que el profesor emplea la opinión de la mayoría, como en la expresión: “*¡Eso es una recta!*”. En esta situación didáctica, el docente hace ligeras modificaciones a las explicaciones construidas durante la interacción, propiciando una complementariedad entre las versiones de los alumnos y la suya propia. Las intervenciones del profesor hacen la doble función de solicitar explicaciones y tratar de orientarlas hacia las respuestas que él considera aceptables.

La noción de variación que usó el profesor durante su explicación fue la de variación numérica y el modelo del que se valió fue representado por la tabla de valores. El fenómeno didáctico de envejecimiento de las situaciones de enseñanza se produce incesantemente en el aula, pues el profesor interactúa constantemente con los alumnos mediante el uso del saber. A pesar de que se analizan varios episodios aislados, eso no significa que el fenómeno de envejecimiento ocurra solo en esos instantes, pues como señala teoría y constata nuestra propia evidencia empírica, este fenómeno ocurre permanentemente. Este análisis lo único que hace es describirlo, estudiarlo y explicarlo.

- Puntos intermedios y la tabulación

En el siguiente extracto, el profesor explica que para hacer la gráfica de una función se requiere de una tabulación. Propone los valores siguientes, -3, -2 y -1.

Extracto 5.4

P: ... $f(x)=x$. Queremos su gráfica. Haremos una tabulación. Vamos a darle valores a x y encontramos los de y ; por ejemplo empezamos con -3, -2, -1. ¿Por qué en números enteros?, alguien podría preguntarme. Porque son sencillos de trabajar; también puedes ocupar fracciones, pero ¿para qué meterse en problemas, verdad? La pregunta podría ser: ¿por qué no evaluamos en más números? Eso es a criterio tuyo, o sea, si tú consideras que con esos puntos puedes visualizar la forma de la gráfica. Si para ti no son suficientes los puntos tendrías que dar más, ¿cuántos? Los necesarios para que tú visualices la gráfica. En este caso para hacer su gráfico nos encontramos con esto: -3 con -3. Creo que ese ya lo trabajan muy bien: el 1 con el 1, el 2 con el 2, el 3 con el 3. ¿Por qué unimos los puntos? Porque entendemos que los demás *puntos intermedios*, también los puedes evaluar y encontrar su respectiva pareja; entonces los unes y te da esta figura que representa una recta.

C (Gpo-1), pp. 2-3.

Dicha explicación es interesante ya que el profesor supone que los alumnos le van a hacer una serie de preguntas que él mismo formula y contesta. La primera pregunta alude a la selección de números enteros para tabular: “¿por qué en números enteros?”. Su explicación enfatiza en que resulta más sencillo trabajar con enteros que con fracciones. La segunda pregunta, “¿por qué no evaluamos en más números?” la deja al criterio del alumno, pues lo que interesa es que visualicen la forma de la gráfica.

Cobra especial relevancia la última pregunta, “¿por qué unimos los puntos?”, debido a que la explicación del profesor gira en torno a los puntos intermedios (sucesión de puntos) que hay entre los números propuestos. Si bien al unirlos da una gráfica, los puntos intermedios son aquellos que el profesor mencionó que era complicado tabular (las fracciones); los números con los que elabora su situación de enseñanza son tres valores alrededor del cero. Además, en su explicación aparece la noción de variación numérica, donde el número ordena puntos, mientras que su modelo es la tabla de valores. La función se visualiza con ayuda de un modelo de representación gráfica.

Como en la explicación anterior, la siguiente también se refiere a la sucesión de puntos, solo que aquí se les dificulta a los alumnos unirlos. Esta dificultad puede eventualmente ser controlada por la gestión de clase del docente, quien asume el control del discurso, tanto al nivel de las afirmaciones como de las respuestas a

las preguntas que él mismo plantea. Esta situación será de interés al momento de analizar, en un sentido general, el papel de la explicación en las conclusiones de esta investigación.

Extracto 5.5

P: Este tipo de gráficas, les digo, son muy comunes. Ustedes no se deben asombrar. Ya lo vieron, muchos estaban buscando un punto por allá, otro por acá y no podían llegar a formar una sucesión de puntos. Resulta que esto es lo que pasa: simplemente me fijo dónde corta el eje de las X. Por eso da una idea de que la curva está cruzando al eje de las X en 3 puntos: aquí lo está cruzando en 2. Generalmente el grado de polinomio les dice cuántas veces corta el eje de las X. Si el grado es 1 por ejemplo, es una recta, corta el eje de las X en un punto; si es cuadrática puede cortarla en 2; si es cúbica la puede cortar en 3, es decir, cruzarla en 3 puntos, y si es de cuarto grado, debe cortarla 4 veces...

A (Gpo-1), p. 30.

Esta explicación se da cuando se trabaja la función cúbica $f(x) = x^3 - 4x$. Aquí el docente sugiere otra estrategia diferente a la de su colega en la situación anterior, que consiste en localizar el punto donde corta la gráfica al eje de las X, de ahí que haga una tabulación con menos puntos y se apoye, como recurso visual, en la representación gráfica de la función.

Para finalizar la explicación del comportamiento de la función, en cuanto al grado del polinomio, el profesor intenta **generalizar** cuando dice que, dependiendo del grado del polinomio, son las veces que cruzará al eje X. Sin embargo, este tipo de generalizaciones incorrectas le ocasionará un problema al estudiante si las toma al pie de la letra, ya que intentará aplicar tal criterio en los diferentes ejercicios. Estos intentos de generalización que eventualmente encontrarán contraejemplos, exigen cambios en las explicaciones a futuro, por así decirlo, son el germen de cambios potenciales de la explicación, que seguramente se producirán ante la exigencia de los alumnos ante nuevas situaciones. Si bien el ejemplo queda bajo el control de la explicación del profesor de este episodios, la generalización no.

La explicación donde aparece la noción de variación se aprecia claramente en el empleo del modelo de la tabla de valores (variación numérica) y en el modelo de la representación geométrica.

En el fragmento anterior podemos apreciar que la función $f(x) = x^3 - 4$ es propuesta por el profesor Alberto y, en esta sesión, el profesor Bruno también la trabaja.

Extracto 5.6

P: ¿Cómo resolver esa cúbica $f(x)=x^3-4x$? Bueno, nos tardaríamos ahorita en ver eso de la evaluación; hay que buscar alguna forma de resolverla para encontrar, los puntos de corte. Si no podemos hallar los puntos de corte, ¿qué podemos hacer? ¡Eh! ¿Qué es lo que podemos hacer?

Am: (...)

P: ¿Darle valores a quién? pues a X , con darle los valores correspondientes a Y ; hay que graficar esos valores ¿no? ¿Cuántos? Ahí ¿cuántos?, para dar una idea más o menos sobre cómo es la curva, ¡eh! Ya es parecida a algo que caracteriza a las cúbicas en general, que son así más o menos, ¿no?

B (Gpo-1), p. 66.

En la explicación del docente sobre la graficación de esta función se aprecia que, si no funciona una u otra estrategia para graficar la función, hay que recurrir a la tabulación. Tales estrategias consisten en factorizar la función o bien en hallar los puntos de corte.

A diferencia del extracto 5.5, donde se pretendía conocer el comportamiento de la función encontrando los puntos de cruce o corte en el eje X , aquí el profesor sugiere que se tabule en caso de no identificar los puntos de corte. El docente ofrece dos alternativas: factorizar o tabular. Como el modelo de la tabla de valores ha sido privilegiado, los alumnos optan por este método para conocer el comportamiento. Una vez más son las características del contexto escolar las que guían las elecciones del docente, este predominio del argumento tabular parece simplificar la explicación, de ahí que la búsqueda de economía del docente condicione los factores del envejecimiento.

- *Aproximación y la tabulación*

El método del profesor Bruno para graficar una función consiste en hallar el dominio-rango, ver si la función es par o impar y encontrar el cruce con los ejes. Dicho ejercicio es muy parecido al presentado en el extracto 5.3.

Extracto 5.7

P: ¿Cómo le hago para trazar la gráfica: $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$?

Am: Dar valores cercanos al 4

P: En 4. Mientras que ésta no está definida en 4, ni aquella tampoco, entonces nada más graficamos esto ¿no? ¿Cuál es la gráfica de $g(x)=x+4$, qué es esto?

Am: Una recta

P: Es una recta ¿Y qué necesitamos para graficar una recta?

Am: 2 puntos

Am: más 4 sería, cerca del 4 y no del 3, profesor.

P: ¡Ah! es en 4

Am: Sí

P: Es en 4, ¿verdad?, y yo estoy pensando en 3... aquí, sería en 4.

Am: Sería...

P: Entonces en 4, a ver por acá, 4.1 ¿Cuánto me daría?

Am: 8.1

P: 8.1, 4.01, me da 8.01, bueno y si me acerco más, ¿qué va a pasar? Se está acercando, se está acercando a...

Am: 8

P: ¿Que sucede en 8?, la función está

As: ¡Indefinida!

B (Gpo-1), pp. 77-78.

La actividad se resuelve conjuntamente con los alumnos. El docente inicia con la pregunta “¿Cómo le hago para trazar la gráfica?” Un alumno responde que darle valores muy cercanos al 4, al darse cuenta que no está definida en 4. Por la factorización que se realizó, el docente pregunta cuál es la gráfica de $g(x)=x+4$, y responden los alumnos que es una recta.

El ejercicio es abordado conjuntamente por el docente y alumnos a través de la tabulación (aproximar valores al número 4) para ver el comportamiento de la gráfica.

El profesor genera una interacción cuando demanda a los alumnos que expliquen su opinión, como se pudo constatar en la secuencia anterior. Las preguntas que formula el docente, como ya mencionamos, dan pie a intervenciones de los alumnos en las que demuestran sus conocimientos sobre el tema.

En esta interacción discursiva un estudiante corrige al profesor: “*más 4, sería cerca del 4 y no del 3, profesor*”, ya que él le está dando valores alrededor del 3 y no del 4 como había sugerido un estudiante anteriormente. En lugar del dominio, se está hablando del valor de “y” si la función fuera una recta.

De este extracto se puede concluir que se realiza una tabulación y en la tabla se muestra la relación que hay entre dos cantidades, esto es, una variación numérica donde un número ordena puntos.

Como relación de trabajo, la enseñanza es construida entre maestro y alumno. Los ajustes y negociaciones que ocurren entre ellos implican una construcción colectiva.

- Rotación y la tabulación

En el siguiente fragmento, la explicación del docente gira en torno a un ejercicio que consiste en graficar y comparar las funciones lineales $y(x)=x$ y $f(x)=-x$.

Extracto 5.8

P: Vamos a graficar $f(x)=x$. Lo que yo observo es que me estoy tardando haciendo esto y pudiera recordar que con 2 puntos puedo dibujar una recta. Entonces nada más le doy 2 números para no hacer tantas parejas y los vamos a señalar; vamos haciendo las parejas, y ustedes calculan. Las parejas son (-3,-3), (-2,-2) y así lo vamos a hacer con $f(x)=-x$, nada más vamos a darle 2 puntos ¿qué números? Ahí surgió la pregunta ¿qué números? Los que tú quieras, los que para ti sean sencillos. Para mí el más sencillo sería el 0 y el 1; nada más vamos a trabajar con el 0 y el 1 donde están los puntos... luego le doy uno positivo y uno negativo.

Am: ¿Cualquier número?

P: Sí, puede ser cualquier número, fracciones, decimales, por ejemplo puede ser p , o $\sqrt{2}$. Vamos a manejar el -3, si tú evalúas en -3 sería 3 y lo evaluamos en 3 y da -3 y hacemos la localización... Bueno ya los tenemos, ... el ejercicio es para que tú observes que puedes realizar una gráfica y que podemos sacar una información muy importante. Vamos a comparar estas dos gráficas, aquí rápidamente voy a encimar la función $y(x)=x$ o sea $f(x)=-x$, para que las comparemos. Yo lo que podría observar es... Me preguntaría aquí donde puse menos aquí tenía esta expresión y me quedó la gráfica esta y ahora le pongo un menos y me aparece la gráfica de este modo. Entonces podría ser la respuesta a ese menos; el modo de aparecer de la gráfica, o sea el menos a esta gráfica la puso en esta forma. Ahora, si yo lo pondría así, vean a la gráfica, la rotó, ¿verdad? la rotó en ese sentido, alguien podría decir, bueno y por qué no en el otro sentido, también la pudo haber rotado así, pero de cualquier forma hubo una rotación, en este caso, si lo pienso en esta forma hubo una rotación de 90° , ¿sí, verdad de 90° ? y si lo veo de esta forma hubo una rotación de ¿cuánto? de 90° ¿verdad?

As: De 90°

P: Pero en el otro sentido. Bueno, entonces hubo una rotación. Yo podría decir que un menos a la expresión le hace una rotación.

C (Gpo-1), p. 4.

La graficación se llevó a cabo con una tabulación para cada una de las funciones que propuso el docente. El sugiere que se den dos puntos con los que se puede graficar una recta, 1, 0 y luego los valores negativos. Los alumnos preguntan que si pueden dar cualquier número para hacer la tabulación; el profesor responde que

propongan la cantidad más sencilla, añada que pueden ser fracciones, decimales, raíces, o el símbolo π .

El profesor basa su explicación en la visualización de las gráficas, ya que las compara, y en su discurso aparece la idea de movimiento de las gráficas. Cuando confronta las rectas, una positiva y la otra negativa, dice que hubo una *rotación* de 90° (de la recta negativa), que el signo menos lo que le hace a la función es una *rotación*.

Al tratar de establecer una relación entre $f(x)$ y $-f(x)$ habla de una eventual rotación de 90° . En realidad, da una reflexión alrededor del eje de las X, que en este caso coincide con una rotación en su forma general, pero puntualmente el movimiento es la reflexión. Aquí se presentan dos tipos de explicación donde aparece la noción de variación: el modelo de la tabulación, el de la representación gráfica y el del lenguaje natural, digamos basado en definiciones no formales. Este episodio al mezclar lenguajes no formales con formales, produce un factor de envejecimiento, en la medida en que se incorporan al escenario acciones, como el giro, no previstos ni generalizables. Es decir, en la medida en que avanza su curso, el profesor abandona la idea de la rotación para usar sistemáticamente la de reflexión, pero el empleo de la palabra giro o rotación quedará como un argumento de base entre los alumnos quienes demandarán su uso en situaciones posteriores y de ahí la aparición de explicaciones por demanda.

- *Crece o decrece y la tabulación*

En la siguiente secuencia, el docente explica el comportamiento de la función exponencial $f(x)=e^x$.

Extracto 5.9

P: Tu gráfica e^x es así, sube y aquí se va acercando al 0. Una pregunta importante sería ¿qué valor es éste? Ahí cuánto vale la e; entonces con tu calculadora vas hacer e^0 , pero no la necesitas ¿cuánto es e^{0^2} ?

As: 0

P: 1

As: ¡Ah! No, 1

P: Ésta es la función exponencial e^0 es 1. Lo que hace la exponencial es elevar este número a una potencia, a la que tú le des, ya sea entero, racional o irracional. Por ejemplo, si le das e^2 , ¿cuánto es? Háganlo en su calculadora

Af: 7.29

P: O sea, que el 2 lo mandas a este valor, ¿verdad? El 3 ¿A dónde lo manda?

Af: Es 7.39

P: El 3 a dónde lo manda

Af: 31

P: Fíjense, el 3 ya lo está mandando hasta 20.6, o sea...

Af: 20 puntos

P: 20 punto y tantos, pero fíjense cómo crece muy rápido la función, el 3 lo manda hasta el veintitantos, imagínense el 20 a donde lo manda e^{20} ¿cuánto es?

As: ¡Uuuuh!

P: Y e^4 ¿cuánto es?

Af: 54.59

P: ¿ e^4 ?

Af: 54.59

P: Imagínense, crece muy rápido la e^x , por eso estábamos diciendo que, por eso la curva está así. En cambio, ahora evaluamos en este espacio; tienes que evaluar en un número negativo, por ejemplo en -3. Aquí queda como e^{-3} .

Af: 0.049

P: Exacto. Y miren lo que nos da, casi 0, y eso lo vemos aquí se va acercando cada vez más a 0, muy rápido, pero muy rápido, casi a 0, ésta es la función exponencial (...)

C (Gpo-1), pp. 29-30.

El profesor da pie a la interacción cuando hace partícipes a los alumnos para hacer la tabulación de los valores que propone; sugiere que usen la calculadora, pero que en el valor 0 no la van a necesitar. La respuesta que da la mayoría es errónea; dicen que e^0 , es 0, y el docente les aclara que es 1.

El profesor, con la colaboración de los alumnos, va haciendo la tabulación de la función y explica que la gráfica crece muy rápido al elevar la e ; a números positivos como, por ejemplo e^{20} . La mayoría dice ¡uuuh! y se puede interpretar como que el crecimiento es muy rápido; sin embargo, cuando realiza la tabulación para los números negativos, la gráfica se va acercando a cero.

La tabla de valores sirvió para constatar la variación numérica y donde crece la función. El modelo usado por el profesor es la representación geométrica para visualizar la función y emplea el modelo del lenguaje natural. El docente dio estas razones para que los alumnos comprendieran que la función era creciente. Durante la relación didáctica el *saber enseñado* se convierte en *saber del alumno*.

A continuación se presenta un ejemplo donde aparece un argumento de autoridad.

Extracto 5.10

P: Necesita desarrollar la tabulación tal como la hemos trabajado. Implica una evaluación, ¿verdad? sobre una expresión que es $f(x) = (x+1)^2$ ¿Qué entenderé que él debería de haber hecho en -3? Donde está x , y le vas a poner -3 , $-3+1$

C (Gpo-1), p. 10.

El profesor dice a los alumnos que deben tabular la función, lo cual les crea confusión porque algunas ocasiones les dice que usen las técnicas de graficación y otras que hagan la tabulación.

Resumiendo

Ha resultado interesante analizar los diferentes planteamientos de los docentes cuando se pretende graficar una función por medio de la tabulación. En los fragmentos anteriores resulta notorio que se ha favorecido a la tabulación, esto es, una variación donde un número ordena puntos, y las tablas muestra la relación que hay entre dos cantidades. En las explicaciones del profesor aparece la noción de *variación numérica* en el sentido de que es el número el que ordena la posición de los puntos, mientras que, en su modelo o representación gráfica, la tabla de valores guía la secuencia de construcción gráfica.

En las diversas intervenciones de los docentes se lograron identificar explicaciones donde, de alguna manera, se aprecian nociones en torno al concepto de variación: relación entre conjuntos, aproximación, crecimiento o decrecimiento, sube, rota, inclinación, comportamiento de los puntos intermedios.

El estudio sobre el papel de la explicación en la clase de matemáticas, intenta localizar, analizar y explicar cómo se desarrolla el fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza. Estos pasajes, descritos anteriormente, muestran que el origen del cambio en la explicación del docente puede ser múltiple y muy complejo. Por ejemplo, el empleo de una generalización no válida, la repetición exhaustiva de un argumento o la combinación de lenguajes inducen factores de cambio en el discurso del profesor y muy particularmente en sus explicaciones. Al nivel teórico, ahí se encuentran las raíces del envejecimiento.

1.1.2. Al momento de construir gráficas como la variación de un punto de referencia

En las explicaciones de los tres profesores aparece la idea de mover un punto de referencia como el origen, el vértice o la asíntota. Dicha idea ha resultado de gran importancia para construir las exposiciones sobre el movimiento de la gráfica:

- Variación de un punto de referencia
- Línea de referencia
- Funciones trigonométricas

- *Variación de un punto de referencia: el vértice*

En la secuencia didáctica siguiente, la explicación del profesor gira en torno al desplazamiento del vértice o la *variación de un punto de referencia*.

Extracto 5.11

P: Por eso marque ahí (-1, 0). Ahí está su gráfica. Fíjense: cuando el número afecta a la función básica lo sube o lo baja, pero cuando afecta a la variable de la función directamente la mueve. En este caso, ¿Hacia dónde la movió?

As: ¡A la izquierda!

P: A la izquierda. Uno pensaría que porque tiene más (+) la mueve hacia la derecha, pero no.

Af: ¿Y si fuera $f(x)=(x-1)^2$ lo movería hacia la derecha?

P: Lo movería hacia la derecha. Les decía que uno pensaría que con más (+) es hacia la derecha y si es menos (-) a la izquierda, pero no es así, es al revés. Si es más (+) se mueve hacia la izquierda y si es menos (-) hacia la derecha, eso es lo que estamos observando, o sea, porque se contestaría a través de su tabulación, localizando los puntos.

C (Gpo-1), p. 11.

Aquí se está trabajando la función cuadrática $f(x)=(x+1)^2$. La explicación del docente atiende al movimiento del vértice cuando la función es afectada por un número (“cuando el número afecta a la variable de la función directamente la mueve”) y la compara con la función básica $f(x)=x^2$ que, al ser influida por un número, hace que el vértice sube o baja. El profesor pregunta hacia dónde se movió la gráfica y utiliza la opinión de la mayoría para legitimar su explicación, ya que los alumnos contestan a coro “¡A la izquierda!”.

Una alumna toma como referencia el ejemplo que formula el docente para generalizar la explicación del movimiento o de la variación del vértice a través de la pregunta “¿Y si fuera $f(x)=(x-1)^2$ lo movería hacia la derecha?”. El profesor dice que si es más (+), la gráfica se mueve hacia la izquierda y si es menos (-) hacia la derecha. La noción de variación se da con relación a un punto de referencia que se mueve, mientras que la validación recae en la tabulación.

El profesor recurre a expresiones familiares para ilustrar el movimiento del vértice (sube, baja, derecha, izquierda) y usa dos tipos de explicación para la noción de variación: el modelo del lenguaje natural y el de la representación geométrica.

La relación didáctica implica una construcción colectiva, ya que en la enseñanza participan maestro y alumnos, implicando ajustes y negociaciones.

En el extracto siguiente, el profesor propone que se grafique la función $f(x)=x^3+x$, y solicita la colaboración de los alumnos para hacer a tabulación. Dicha estrategia facilita la interacción, hace que todos los alumnos estén atentos al pizarrón y participen en la elaboración de la tabla de valores.

Extracto 5.12

P: ¿Cómo la podría graficar? Lo más sencillo, aunque muy laborioso sería hacer una tabulación. ¿Pero cuántos valores le voy a dar? Eso es lo que no se sabe. ¿Cuántos valores le voy a dar? Vamos a darle los números -3,-2, -1 Si alguien me ayuda por favor para hacerlo un poquito rápido: -3^3 .

As: 30

P: -27, -2^3

As: -10

P: -8; -1^3

As: -2, 0

P: -1; ¿verdad? el 1 con 2. Son negativas como parejas. Esos son los puntos. Me daría a entender que más o menos va a así porque aquí está la joroba ¿verdad? La jorobita por aquí está; se remarca por esta parte. No está escalado, yo sé que no está escalado, pero más menos esa sería la forma. Fijense como se hace la gráfica $f(x)=x^3+x$ en un momento dado me muevo así y vean como se hizo. La pregunta es ¿en qué punto hago el cambio? Yo lo hago cuando a mí me parezca que se vea bien, por ejemplo. A mí me parece que se ve bien, pues yo lo hago también aquí y tengo problemas todavía para hacer la gráfica. En la curva sería interesante saber cómo la muevo para que el centro me dé así.

Am: El cambio es en el centro ¿no?

P: El cambio es en el centro, podría usted pensarlo así. ¿Ustedes ya hicieron la gráfica? Tal parece que con tabulación voy a lograr una buena gráfica... Entonces, esto me daría a entender que ya tengo el problema resuelto; no voy a aplicar las técnicas de graficación, lo voy a hacer con tabulación. Ahí está una de ellas, y lo hice con las parejas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

C (Gpo-1), p. 17.

El profesor trabaja la graficación de funciones con lo que él llama “técnica de graficación”, pero no le sirve ya que, a partir de una función básica $f(x)=x^3$ -le ha denominado así- le suma o resta parámetros; sin embargo, como está afectada por la variable x , sugiere utilizar la tabulación.

Surge una interrogante en el discurso del profesor cuando intenta mover la curva: “*sería interesante saber cómo muevo la curva para que el centro me dé así...*”. Lo que desea es manipular el origen (0,0) de la gráfica, esto es la variación de un punto de referencia.

Aquí, el docente privilegia el modelo de la tabulación, y la validación de la gráfica recae en la tabulación.

En el fragmento siguiente, el profesor explica dos funciones radicales $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $f(x) = \sqrt{x-1}$. Aunque se trata de la misma función, le cambia el signo a la raíz para estudiar como varía el punto de referencia, tomando como base $f(x) = \sqrt{x}$. Al sumarle +1 a la raíz hay un *corrimiento* a la derecha y cuando se resta -1, a la izquierda.

Extracto 5.13

P: Para el otro valor, mayor que 1, sucede un corrimiento, ¿verdad? mayor que 1. Aquí está 1: ahora hagan la curva. Si lo corremos a la derecha, fíjense bien cómo cambia un signo, cómo puede *variar* completamente un signo. Más es uno, menos es esto. Se trata de la misma función, nada más que ahora lo que sucede es que lo movemos a la derecha o a la izquierda y entonces hay todo este tipo de curvas. Fíjense muy bien porque en un examen son conceptos muy sencillos, pero fácilmente se pueden equivocar...

A (Gpo-I), p. 40

Se trata de la misma función, pero el signo hace que la gráfica se mueva a la derecha o a la izquierda. La explicación del profesor se da a través del modelo de representación geométrica, visualizándose el movimiento de la gráfica.

En esta secuencia, el docente explica la graficación de la función

$y(x) = -e^{x-\frac{1}{3}} + 1$, por medio de la “técnica de graficación” y manipula la gráfica.

Extracto 5.14

P: Así es. Alguna pregunta de esto, algún comentario del ejercicio. Si se entiende entonces que la exponencial es e^x , después la movemos hacia la derecha $1/3$, si su punto de referencia está en 0, entonces la movemos hacia la derecha $1/3$, ahí está. Entonces $e^{x-1/3}$, ahora le aplicamos el signo menos $-e^{x-\frac{1}{3}}$ y lo que vamos a hacer es invertirla con respecto al eje de las X, ¿están de acuerdo?

As: Sí

Am: Y a 1 le sumamos ese 1

P: Sí, ahora le sumamos 1. Entonces a este punto le sumamos 1, pero sería mejor

empezar con la línea de referencia, que es esta, y ésta le sumamos una unidad imaginariamente, claro.

C (Gpo-1), p. 39.

La manipulación de la gráfica consiste en mover un *punto de referencia* que sería donde cruza la función el eje y , tomando como base la función $y(x)=e^x$. Se parte de la función básica $y(x)=e^x$ para ver que le sucede a la gráfica; si ahora el exponente es $x-1/3$, se mueve el punto de referencia; luego el signo negativo la invierte. Es interesante ver el profesor si se refiere a la reflexión. (“invertirla con respecto al eje de las X ”). En el ejemplo 5.8 usó otra explicación, aquella de la rotación.

El profesor pretende llegar a un consenso cuando pregunta “¿están de acuerdo?”, con el fin de validar su explicación. Dicha técnica de graficación la usa mucho el docente, pero también la tabulación. Esto confunde a los alumnos, ya que en ocasiones no saben cuándo emplear una u otra. La explicación donde aparece la noción de variación gira en torno al modelo de representación gráfica con la cual se visualiza los movimientos.

A continuación se exhiben dos ejemplos donde la explicación del profesor se centra en el desplazamiento del vértice.

Extracto 5.15

P: Bueno ¿cuál es gráfica de la función?, si a esa función le sumamos por ejemplo 1, y queda $y=x^2+1$

Am: se desplaza el origen en $y=1$.

P: ¿Verdad que estaríamos haciendo eso? Dijera que y va a ser lo que valga en x^2 y eso que estaríamos haciendo sumándole 1, ¿dónde está en x ? En 0 pónganle 1, en 0 pongo 1 y en 1 cuando valga 1, ahora la y ¿cuánto va a valer?

As: ¡2!

P: Va a valer 2 (...) y entonces la fórmula seguiría siendo la misma. ¿Qué fue lo único que sucedió? que la curva se desplazó una unidad hacia arriba y si la quisiera yo bajar que podríamos hacer.

As: ¡Restar!

P: Restarle 1, ahora cuál sería la gráfica de $y=x^2-1$ le podemos poner esta $y=x^2$, y si regresamos 1 ¿qué va a suceder? Cuando abres al vértice el (0,-1) donde corta al eje X en 1,-1 y esta es la gráfica de $y=x^2-1$, de $y=x^2$. Si yo le resto ¿qué sucede con la curva?

Am: La desplazamos

P: ¿Cuántas unidades la desplazamos?

B (Gpo-1), p. 99.

Inicia la explicación con la función cuadrática básica $y=x^2$ que, cuando se le suma una unidad ($y=x^2+1$), desplaza su origen en $y=1$. La afirmación “*se desplaza el vértice en $y=1$* ” fue hecha por un alumno, aunque no se le solicitó. Al restarle una unidad a la función cuadrática básica ($y=x^2-1$), se desplaza el vértice una unidad hacia abajo y al sumarle una va hacia arriba. El docente utiliza el término “desplaza” que dijo el alumno cuando asevera: “*la curva se desplazó una unidad hacia arriba*”.

Cuando el profesor demanda que los alumnos expongan su opinión, a través de preguntas motiva intervenciones explicativas y resulta de sumo interés para los alumnos poder “mover” o “desplazar” el vértice de su posición inicial. El profesor intenta generalizar que, si a la función básica le suman una cantidad, la gráfica se desplaza hacia arriba, y si le restan, hacia abajo. En esta situación hay dos tipos de explicación donde interviene la noción de variación: el modelo del lenguaje natural y el modelo de la representación geométrica, que sirve para visualizar los movimientos.

Por último, la teoría de situaciones (Brousseau, 1986) está basada en una aproximación constructivista, que actúa bajo el principio de que una noción se construye en el ambiente de situaciones de enseñanza, de ahí que nosotros consideramos que en el aula se crea un discurso que elaboran maestros y alumnos, a continuación se presenta un ejemplo.

Enseguida se percibe cómo se desplaza el vértice de una función cuadrática básica ($y=x^2$) cuando se le suma una unidad y se eleva al cuadrado ($y=(x+1)^2$).

Extracto 5.16

P: Es una parábola $y=(x+1)^2$. Inclusive hasta la podemos ver así, $y=x^2+2x+1$, ¿verdad? Luego, el -2 ¿cuánto es? El -2 es 1. Entonces la curva sería así -a ver si estamos de acuerdo-, mientras que la forma básica sería hasta acá, que es $y=x^2$; la forma sigue siendo la misma. Debemos entender que es la misma curva y lo único que hace la línea es desplazarla ¿hacia dónde?

Am: A la izquierda.

P: Hacia la izquierda. Y si la quisiéramos mover más hacia la izquierda, ¿que tendríamos que hacer? Que se sustituya en la forma básica ¿a quién? A x por $x+2$ ($y=(x+2)^2$). Si la quiero yo hacia la izquierda, hasta -10, entonces ¿en dónde se ubicaría F? si la función original es $f(x)=x^2$ y yo me la quiero llevar hasta el vértice que está en -10, ¿qué hago?

Am: Sería: $y=(x+10)^2$

B (Gpo-1), p. 101.

La explicación del profesor toma como referencia a la función básica. Es la misma forma de la curva, pero ahora se desplaza una unidad hacia la izquierda y, si se quiere mover más hacia la izquierda se tendría que dar un número negativo cualquiera, como el -10.

Aquí se destaca que el profesor Bruno hace el binomio al cuadrado. Esto lo podemos ver al inicio de este extracto; sin embargo, en el grupo del profesor Carlos, hay toda una discusión por el hecho de que un alumno desarrolle el binomio al cuadrado (extracto 5.31). Al término de las explicaciones sobre el movimiento o el desplazamiento del vértice, el docente resume el tema con la siguiente tabla.

Función	Gráfica
$Y=f(x)+c, c>0$	La gráfica $Y=f(x)+c$ desplazada c unidades hacia arriba
$Y=f(x)-c, c>0$	La gráfica $Y=f(x)-c$ desplazada c unidades hacia abajo
$Y=f(x-c), c>0$	La gráfica $Y=f(x+c)$ desplazada c unidades hacia la derecha
$Y=f(x+c), c>0$	La gráfica $Y=f(x+c)$ desplazada c unidades hacia la izquierda
$Y=-f(x),$	La reflexión de la gráfica de $Y=f(x)$ sobre el eje X

Se aprecian dos tipos de explicación que implican a la noción de variación. Uno es el modelo del lenguaje natural (desplazamiento hacia arriba, hacia abajo, izquierda, derecha) y el otro el modelo de la representación geométrica, que permite visualizar el desplazamiento de la gráfica o parábola como una identidad completa.

El siguiente extracto es parecido a los ejemplos anteriores; el vértice consiste en un punto de referencia que se mueve. La función con la cual se está trabajando es la cuadrática básica, pero ahora negativa $Y=-x^2$ y se invierte hacia abajo.

Extracto 5.17

P: Tenemos $Y=-x^2$. Si ahora fuera invertida, tendríamos que hablar de la función cuadrática, pero hacia abajo...

Am: La están modificando

Am: ¡Eh!

Am: La están modificando esos números.

Am: Por ejemplo, si son negativos.

P: Regresen a la ecuación de la parábola; converge en el origen de A ¿cómo dice $(X-h)^2 + 4p(y-k)$? ¿Le llaman A o P?

As: P

P: $4P(Y-K)$, esto es \pm , ¿verdad?, Es decir, que la parábola, si es positiva, sería

hacia arriba; si es negativa, hacia abajo. Esto sucede en un caso más general, por ejemplo, déjenme ver, cuando el vértice no es el origen ahora ¿Cómo sería esta parábola $y = x^2 - 2$, ¿será semejante a aquella?

Am: Si

Am: No

Am: No se va a mover del origen

Am: Se mueve nada más.

As: (...)

P: Nada más es un corrimiento

Am: 2 a la izquierda (...)

P: Que tal si paro el movimiento (...)

Am: Si yo la roto (...)

P: Si yo le restara dos o le sumara dos, fíjense bien qué pasa con estas parábolas.

Am: Se hace hacia la izquierda

Am: O hacia la derecha.

A (Gpo-1), p. 24.

Cuando un alumno dice “*la está modificando*”, se refiere a que el signo menos está modificando la gráfica. Hace tal comentario ya que la función básica con la que se auxilia es la cuadrática $f(x) = x^2$. Podemos ver que los alumnos dan explicaciones sobre lo que le paso a la parábola al ser afectada por un signo menos.

El docente recurre a la parábola para explicar cuándo es que son cóncavas y cuando convexas. Propone otra función, $y = x^2 - 2$ con la intención de que los estudiantes la comparen con la parábola anterior, y surja una discusión entre los alumnos sobre si hay semejanza entre las dos funciones. Las anteriores intervenciones de los alumnos, son distintas versiones que se dan como respuesta a la pregunta y en algunos casos se contraponen entre sí y con las explicaciones del profesor. Los alumnos manejan el movimiento del origen (así lo hacen en el episodio, aunque como sabemos se trata más bien del vértice) y su desplazamiento hacia la izquierda o hacia la derecha para construir una explicación acerca del comportamiento de la gráfica. Aquí la explicación de la noción de variación ocupa el modelo de representación geométrica, a través del cual se visualiza el comportamiento de la parábola hacia arriba o hacia abajo. En la secuencia anterior lo que señala (Bruner, 1988) que la construcción del conocimiento no es un proceso individual, aislado, sino un proceso social de creación conjunta de la cultura.

A lo largo de estos extractos hemos podido observar que sistemáticamente se hace referencia a las relaciones entre desplazamiento de una gráfica con la variación de parámetros. La mixtura de lenguajes utilizados en estos ejemplos,

proviene de un referente natural cotidiano, se usan ideas, expresiones, metáforas, generalizaciones basadas en lo más familiar para ellos. El mover un vaso, una silla, o ahora una gráfica no exigirá de una explicación mayor, una explicación matemática, sino que habrá de demandar de explicaciones didácticas, explicaciones que son familiares y sirven para el entendimiento. Explicaciones que, desde un cierto punto de vista matemático, no son consideradas explicaciones matemáticas en la medida a la que aluden acciones sobre objetos concretos. En este sentido, el espacio de interacciones discursiva entre los alumnos y el profesor cuando se trata de nociones como la variación, se amplía considerablemente dando lugar a un ambiente de acuerdos y negociaciones muy amplio. En nuestra opinión, si esto es consubstancial a la clase de matemáticas, es más fuerte y persistente cuando se trata de nociones paramatemáticas. Sabemos bien que esta situación no se hubiera producido si la discusión hubiera fincado sus bases sobre un concepto con definición explícita, como la integral, el límite o la derivada. De ahí la relevancia del análisis que ahora llevamos a cabo.

- Línea de referencia: la asíntota

En el siguiente fragmento veremos una explicación muy interesante del profesor, quien les explica a sus alumnos que, para distinguir el movimiento (refiriéndose a las gráficas), deben tener un punto de referencia, y propone como ejercicio la función:

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - 2.$$

Extracto 5.18

P: Para que usted distinga el movimiento debe tener puntos de referencia. Ahora está la función, $f(x) = \frac{1}{x+3} - 2$, y la básica es: $f(x) = \frac{1}{x} - 2$. ¿Hacia dónde lo mueve el 3?

As: ¡A la izquierda!

P: O sea, esta línea se mueve 3 unidades hacia la izquierda y resulta claro que esa es la referencia; ya nada más realizo la curva. Ahora, ¿hacia dónde la mueve el -2?

As: ¡Hacia abajo!

P: Entón ces este punto es de referencia. Ponlo hacia abajo una o dos unidades y, para que se marque bien, traza la línea y anota -2. La curva debe ser esta, y aquí debes de hacer esto, ¿verdad?, pero tienes bien marcada la línea. ¿Algún comentario?

C (Gpo-I), p. 27.

Inicia su explicación con la función básica de la hipérbola ($f(x) = \frac{1}{x}$) y continúa operándola al considerar dos asíntotas. Hay dos asíntotas y en el primer movimiento una se mueve a la izquierda en 3 unidades, y en el segundo hacia abajo en 2 unidades. Aclara el profesor que hay que marcar bien las líneas.

El docente utiliza la opinión de la mayoría para legitimar su versión, (“*A la izquierda!*”, “*¡Hacia abajo!*”) y son notorias las relaciones que se generan en el salón de clase entre el profesor, los alumnos y el conocimiento. La explicación del profesor que involucra la noción de variación se da por medio de dos líneas de referencia: las asíntotas. El modelo de representación es geométrico ya que, con la ayuda de la gráfica, se visualiza su comportamiento.

- *Funciones trigonométricas*

En esta situación, la intervención del docente parte de la pregunta “*¿cómo será la gráfica de $f(x)=\csc x$?*” y propicia la interacción discursiva con los alumnos, quienes aportan valores. Un alumno dice que es muy parecida a la función que habían visto anteriormente $f(x)=\sec x$.

Extracto 5.19

P: ¿Cómo será esa gráfica de la función $f(x)=\csc x$?

Am: En 90 va seguido, en 0 vale ∞ en π (...)

P: En 0 ¿cuánto dicen que es?

As: ∞

P: Da ∞ , en 0 es ∞ , en 90 es 1

Am: Es algo parecida a la anterior, nada más que no toca la (...)

P: $3\pi/2$, 2π . Es muy parecida, nada más que, que hay un desfase, un corrimiento. Esta es la función cosecante. Yo creo que no se les va a olvidar. Aquí sería para 1,-1, cuando es 90° (...), nada más que tiene un desplazamiento de 90° . Esa repito es la función cosecante.

A (Gpo-I), p. 60.

El profesor explica que la función $f(x)=\csc x$ sufre un “desfase” o un “corrimiento”, ya que la compara con $f(x)=\sec x$. Este caso no es sólo mover el vértice, ya que hay asíntotas, sino mover los puntos de referencia, las asíntotas en este caso habrá que hacerlo en $\pi/2$. La explicación el profesor recurre al modelo de la representación geométrica, mientras que su noción de variación es la de un punto de referencia. Para ambas se auxilia de la gráfica.

En el siguiente fragmento, el docente compara las funciones $f(x)=\sin x$ y $f(x)=\cos x$. Como la intención es que coincidan las gráficas, la estrategia radica en

jalar la onda, una hacia delante o bien jalar la otra hacia atrás. Esto es, correr las gráficas de $f(x)=\text{sen } x$ y $f(x)=\text{cos } x$.

Extracto 5.20

P: ¿Cómo podemos jalar a una hacia delante o echar una hacia atrás para que coincidieran? ¿Cómo podría trazar el coseno hacia delante? si yo dibujara el coseno hacia acá, aquí va a ser donde lo doble para que la curva coincidiese. Así, yo lo corto aquí y este pedacito que se le fragmenta...

As: (...)

P: A ver, ¿cómo lo puedo jalar?, ¿cuál sería la función para que yo agarre la curva? ¿Qué tendría que hacer? Si quiero correr la función coseno, sería $y=\text{Cos } x-p/2$; si yo sustituyo X por $x+$, donde el seno sea menor que 0; si sustituimos a la X por $x+c$, entonces hay un movimiento ¿hacia dónde? Hacia la izquierda.

Af: Izquierda

P: Si yo sustituyo al X en la función por $x-c$, hay [un movimiento] de esta unidad está hacia la...

Af: Derecha

P: La derecha ¿verdad? en el caso de la función seno y coseno se dicen que las gráficas están corridas. ¿Cuánto están corridas?

As: $\pi/2$

B (Gpo-1), p. 131.

El profesor generaliza y concluye la explicación al decir que si se sustituye, en ambas funciones, x por $x+c$, hay un movimiento hacia la izquierda, y si cambia x por $x-c$, hay un desplazamiento hacia la derecha. La noción de variación del docente es la de variación de un punto de referencia y para su exposición necesita la representación gráfica.

Resumiendo

En estas intervenciones de los profesores se identifican las explicaciones donde, de alguna manera, se aprecian sus diferentes interpretaciones sobre la noción de variación.

La idea de tomar un punto de referencia específico, como el vértice, la asíntota o la forma periódica, resultado de gran importancia para construir las intervenciones basadas en entorno al movimiento, des desplaza un objeto, una gráfica. De ahí que el cambio en la explicación pasara del concepto matemático al objeto matemático. Se le atribuyeron nociones de movimiento a las gráficas y a puntos de referencia principales, como vértice, cómo se desplaza, si sube o baja, si se recorre, si se mueve, si se da un corrimiento, etc.

Las explicaciones donde aparece la noción de variación se sustentaron principalmente en el modelo de representación geométrica (argumentos sobre la gráfica), quizá por la posibilidad de sintetizar informaciones en un solo dibujo.

1.1.3. En sus expresiones verbales con referencia a situaciones cotidianas

- *Razones de cambio-variación de cociente*

Durante la sesión de funciones trigonométricas, el profesor aborda las relaciones trigonométricas y pregunta que significan esas relaciones o número (cateto opuesto dividido por la hipotenusa, por ejemplo).

El alumno responde que “*Son como razones de cambio*” y el docente la retoma debido a que no le convenció; argumenta que, cuando se habla de cambio, se alude a una variación de cociente y también se le llama razón, pero no se gana nada, solo cambia el nombre. La razón entre cateto opuesto y la hipotenusa es la relación trigonométrica seno.

Extracto 5.21

P: 0.5, seno de 60°, cateto opuesto dividido por la hipotenusa y esto nos da 0.8660, pero tenemos la misma pregunta ¿qué significa? yo sé calcular esto y si no lo sé, la calculadora lo hace; nada más se le aprietan algunas teclas. Sin embargo, me interesaría contestar esa pregunta ¿qué significan esos números?

Am: Son como razones de cambio

P: Sí, cuando uno habla de cambio, habla de variación de cociente, o sea, es una razón, pero no ganamos nada porque entendemos que es un cociente, al que también se le llama razón. Únicamente le estamos cambiando nombre ¿verdad? Lo que dice su compañero no lo podemos negar. Si es cierto que ésta es una relación a través de la razón, como una división, ¿están de acuerdo?, es la razón entre estos lados, entre los catetos, perdón, la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, y el cateto opuesto y la hipotenusa es la relación trigonométrica seno. El seno es la relación que guarda el cateto opuesto con la hipotenusa; la razón que guarda, es como agarrar una naranja y decir “la voy a dividir entre dos personas”. ¿Cuál es la razón de una naranja con relación a estas dos personas? sería tomar la naranja y dividirla entre dos: la razón sería media naranja...

C (Gpo-1), p. 53.

Para convencer a los alumnos de la razón que guarda el cateto opuesto y la hipotenusa el docente formula una analogía: “*es como agarrar una naranja y decir lo voy a dividir entre dos personas. ¿Cuál es la razón de una naranja con relación a estas dos personas? sería tomar la naranja y dividirla entre dos: la razón sería media naranja*”. Intenta explicar una

situación poco familiar comparándola con otra similar, pero poco conocida por los alumnos, para que puedan comprender y compartir la explicación.

La explicación del docente se basa en una supuesta *variación del cociente* y la ejemplifica o relaciona con otra idea con la que recurre un poco forzado, al empleo de expresiones que considera serán familiares para el alumno. En esta relación didáctica típica del aula que hemos estudiado, el profesor buscando “disminuir” o “invalidar” de alguna manera la intervención del alumno y conservar su carácter de guía en el debate, emplea ese argumento inconsciente con el problema pues se trata de un cociente cualquiera, sino de un cociente de incrementos, es decir, la razón de los cambios. Digamos que explica sin explicar la participación del alumno en este sentido, logró la emergencia de una tal metáfora, eso nos lleva a que son las interacciones entre alumno y maestro quienes regulan el envejecimiento de las situaciones de enseñanza. Sin dicha intervención, el profesor simplemente habría definido el concepto.

1.1.4. Mediante el empleo de parámetros como variables principales

En las explicaciones de los profesores, la manipulación de parámetros les permite que se visualicen los cambios que sufre la gráfica.

- *Variación de parámetros*

El profesor compara las gráficas de la función básica $f(x)=x$, y esta misma, pero le suma 2 unidades, quedando $f(x)=x+2$.

Extracto 5.24

P: Esta una función básica, $f(x)=x$, o sea la básica de $f(x)=x+2$; Este 2 la está rotando. Para que se entienda lo que yo quiero decir con básica, aquí la básica de $f(x)=x$ más o menos sería por aquí... miren como la rotó, ¿cuánto la rotó? ahí no fue tan sencillo. Ahora, ¿qué inclinación tiene? bueno de eso vamos a hablar. Ahora sí yo creo que con esto podemos ir a una traslación, vamos a ponerle así y vamos a sumarle... ¿qué le hace la suma a la traslación? eso es lo que vamos a averiguar. Para observar esto, otra vez, tengo la representación; si lo evaluamos en -3 sería $-3+2$; si lo evaluamos en 3 daría $3+2$, ¿cuánto?

As: 5

Am: Es +5 ¿verdad?

P: Es +5. Ahora sí brevemente dibujo la básica que es $y=x$. ¿Qué le hizo?

As: ¡La sube!

P: La subió, o sea la trasladó ¿cuántas unidades?

As: 2

P: 2, o sea que este número lo que hace es trasladarla en el eje de las Y. Podemos verlo así, subirla 2 unidades. ¿Para qué sirve esto? para hacer un poquito más rápidas las gráficas, y que en un momento es nos puedan ayudar. Por ejemplo para graficar $f(x)=x-3$...

As: ¡La baja!

P: ¿Cuántas unidades?

As: 3

C (Gpo-1), p. 5.

El primer comentario del docente, sobre la variación o cambio de parámetro es que el 2 rota la gráfica de la función en cuanto al origen. Tal idea no es correcta, ya que la gráfica se traslada o sube. Luego maneja la idea de *traslación* en ese mismo ejercicio, al sumarle 2 unidades a la función. Cuando la recta sale del origen hay una *traslación* y para constatar el movimiento de la recta se lleva a cabo una tabulación. Al evaluar la función, el profesor pregunta: “¿qué le hizo?” los alumnos responden “¡la sube!”. No usaron la explicación del profesor, esto es, la idea de translación; Sin embargo, el docente mezcla las dos: “subió” y “trasladó”.

Los parámetros funcionan como un todo; el signo del parámetro determina el comportamiento de la función, su traslación (sube o baja).

Aquí la explicación del profesor sobre la noción de variación se basó en un modelo de representación geométrica, que ilustra el comportamiento de la función. A continuación, se muestra una explicación del docente donde varía los parámetros que multiplican a la función $f(x)=\text{sen } x$, para que se perciban las modificaciones de la gráfica.

Extracto 5.22

P: Cuando le pone un valor ahí, cuando tenga la variable ahí va a incidir en el dominio. Lo que vamos a *variar, dependiendo de qué cambios le haga, es _Senx* y; cuando incide sobre el dominio, la imagen también va a cambiar. Esto indica que su grafica no va a ser la función coseno, sino Senx...

C (Gpo-1), p. 58.

El valor al que se multiplique la función modificará su dominio y rango

El profesor Carlos generaliza lo que hizo en la secuencia del extracto 5.22 y lo lleva hacia la función cuadrática. $f(x)=x^2$, que le llama básica. Su explicación la realiza por medio de la tabulación con la intención de que se vaya reconociendo qué efectos acarrea el 2 cuando se le suma a la función. A diferencia del extracto anterior, donde el profesor se rehusaba a considerar la opinión de la mayoría (“¡la subió!”), aquí ya no se usa el termino traslación, sino el de “¡la sube!”.

Extracto 5.25

P: La expresión básica que vamos a considerar es la siguiente $f(x)=x^2$ y la vamos a considerar como básica de las funciones cuadráticas. Para conocerla vamos a tabularla y de ahí partimos para hacer su gráfica. Vamos a darle algunos y así localizaremos los puntos. Bueno, ya tenemos su gráfica: lo que observamos es que la podemos evaluar en cualquier número, un racional, un entero, un irracional, ¿verdad? podemos empezar a aplicar las propiedades que ya hemos visto ¿cuáles? Las del manejo de gráficas. Por ejemplo, vamos a realizar la gráfica $f(x)=x^2+2\dots$ ¿qué le hace el 2?

As: ¡La sube!

P: ¿cuánto la vamos a subir?

As: ¡2!

P: Muy bien dos unidades. Trato de hacer la forma que tiene; que no sea la misma no nos importa, lo que estamos entendiendo es lo que ese 2 hace es subir dos unidades a la gráfica

C (Gpo-1), p. 8.

Primero se tabula la función y una vez que la reconocen los alumnos, el profesor los lleva a que utilicen lo que él denomina *técnica de graficación*. Como se puede observar, el vértice es un punto de referencia que varía cuando se le suma una cantidad, un parámetro.

En el siguiente fragmento veremos la explicación del docente cuando resuelve un ejercicio que dejo como tarea. Consiste en graficar las funciones cuando varían los parámetros $f(x)=\text{sen } x$, $f(x)=\text{sen } 2x$, $f(x)=2\text{sen } x$, y hallar algunas diferencias y similitudes entre ellas.

Extracto 5.26

P: ¿Cómo quedaría la función? A ver, la primera función es $f(x)=2\text{sen } x$, ¿verdad? Bueno, aquí dice que el doble del seno es 0 es 0; el doble de $\pi/2$ es 2 y el doble del seno es π es 0. Si ustedes se acuerdan de la función que trazamos al principio, la función senoidal, encontramos que la primera era de este estilo, ¿verdad?, donde solamente andaban entre 1 y -1. Si ustedes observan era de -1 y 1; esa era la oscilación que tomaban los valores del rango. Van a ver ustedes que le pasa al doble: aumentó al doble. Es decir, la función duplicó; si fuera triple, entonces la función sería tres veces más; si fuera 4 o 5 veces va aumentando su amplitud.

Am: ¿es una onda, maestro?

P: es una onda central.

Am: Maestro.

P: Bueno, nada más que va aumentando la amplitud lo que sale aquí es más, ¿no? Sería esto, perdón, es así entonces, ¿verdad? Porque $\pi/2$ es 1, entonces es 1: aumenta el doble. Esto es lo que quería que observaran. La otra es la función seno doble, que dice: seno del ángulo doble, es decir, dos veces el seno de 90, dos veces el seno de 0, dos veces el seno de 180, dos veces el seno de 270 o dos veces el seno de 360, ¿Qué pasa ahora con la función? ¿Qué pasa con la función $f(x) = \text{sen } 2x$?

Am: Donde era una frecuencia ahora son dos frecuencias.

A (Gpo-1), pp. 60-61

Su posición inicia con la función básica $f(x) = \text{sen } x$, que oscila entre .1 y 1, y la toma como referencia. Posteriormente atiende al cambio que sufre cuando es multiplicada por 2: aumenta el doble, se duplica. Un alumno, al ver la forma de la gráfica, pregunta “¿Es una onda, maestro?” para conocer si se sigue observando la onda. El docente responde que es una onda central.

La última versión es $f(x) = \text{sen } 2x$, seno del ángulo doble, apunta el docente, y formula la siguiente pregunta: “¿Qué pasa con la función $f(x) = \text{sen } 2x$?”. Un alumno responde: “Donde era una frecuencia ahora son dos frecuencias”. Aunque el docente sabe que tal respuesta es correcta, no la valida inmediatamente y prosigue a dar algunos valores de ángulos para evaluar la función y llegar a la respuesta deseada.

El profesor intenta generalizar su explicación, al decir que la gráfica tendrá cierto comportamiento de acuerdo con los parámetros. Si la función la multiplica un 2, se duplica, y si la multiplica un 3, la función aumentaría 3 veces más, y así sucesivamente, ya que el valor al que se multiplique la función modificará su dominio y rango: los parámetros funcionan como un todo. La función básica $f(x) = \text{sen } x$ juega un papel importante para la graficación de las funciones propuestas. La explicación del profesor sobre la noción de variación fue construida bajo el modelo de representación gráfica y, con la manipulación de los parámetros, hizo visibles los cambios de la gráfica.

Resumiendo

En el discurso de los docentes se pudo identificar explicaciones que, de alguna manera, muestran sus nociones sobre la noción de variación en cuanto a parámetros (rota, traslada, sube). Se asignó un significado geométrico (o atribuciones geométricas) a las gráficas de las funciones como traslación, inclinación, rotación, desfaseamiento, sube o baja, crece o decrece. Hubo dos tipos de explicación, considerando la noción de variación: los modelos de representación algebraica (parámetros) y geométrica.

Estos episodios muestran como la explicación del profesor se mantiene en los márgenes del contrato pedagógico, en el sentido de D'Amore (1999), su discurso tiene un patrón regular: “Explico sobre gráficas y valido sobre tablas”. Este mensaje del profesor mediante sus acciones es captado por el alumno a través de la regularidad didáctica de su aparición y el alumno lo apropiara como una estrategia de respuesta. Es así como el fenómeno de envejecimiento toma en cuenta también al “hábito del aula” y no solo a la transposición pura del saber.

1.1.5. En los casos en que las derivadas son vistas como co-variación o comparación *a/b*

En el ámbito escolar, la derivada muchas veces es considerada como un algoritmo (regla de los cuatro pasos), una fórmula o algo relacionado con la pendiente de tangentes a curvas. Como nuestra investigación se centra en las explicaciones de los profesores y la variación, a continuación veremos la estrategia de la comparación por cociente de dos cantidades.

- Co-variación o comparación *a/b*
- Comparación y resta

*-Co-variación o comparación *a/b**

En este fragmento se observa cómo el profesor usa la fórmula de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y luego define la derivada. Afirma que la pendiente tiene una relación con el ángulo de inclinación.

Extracto 5.27

P: Entonces, hemos visto que la pendiente se puede determinar como la diferencia de las Y entre de diferencia de las X. También vimos que la pendiente tiene una relación con el ángulo de inclinación a través de una pendiente, es la tangente de q (...) o sea, la tangente de q es cateto opuesto al de las Y sobre cateto adyacente, que son las X.

C (Gpo-1), p. 73.

Esta es una comparación por cociente de dos cantidades: el de la pendiente y el del ángulo de inclinación (tangente de θ). Cabe aclarar que los tres profesores dan esta explicación de las pendientes antes de definir la derivada.

Al igual que en el fragmento anterior, el profesor Bruno explica la pendiente y posteriormente define la derivada.

Extracto 5.28

P: En este triángulo rectángulo ¿cuánto miden sus catetos?

As: $x_2 - x_1$

P: $x_2 - x_1$, y ¿cuánto mide el cateto que está abajo?

As: $y_2 - y_1$

P: $y_2 - y_1$, de donde me resultaría que la pendiente de esta recta va a ser igual a la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación y yo tengo ahí que la pendiente es ¿qué?

As: (...)

P: $y_2 - y_1$, Si les digo la situación que me motiva a eso, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ¿está bien? ¿Por qué?

Am: (...)

P: Porque si invertimos tanto el numerador como el denominador, dice su compañero, van a cambiar de signo y el resultado del cociente va a ser negativo. Si aquí la diferencia apunta que ambas son positivas, el cociente va ser positivo y, al invertirlo, si me salieron allá dos positivos, va a ser negativo. Ambos cocientes van ser positivos ¿estamos de acuerdo?

B (Gpo-1), p. 150.

El docente basa su explicación en un triángulo rectángulo y hace la pregunta “¿cuánto miden los catetos?”, para generar la interacción con los alumnos. A continuación, escribe la fórmula de la pendiente y pregunta si el orden de las variables es correcto; un alumno respondió, aunque no se escuchó su intervención en el audio. Por el comentario del profesor, “si invertimos tanto el numerador como el denominador, dice su compañero, van a cambiar de signo”, alude al cambio en el orden de la fórmula.

Dicha explicación es una clara comparación de los valores del cociente; si cambia el numerador como lo hace el denominador. Aunque su discurso está un poco confuso, llega a decir que los dos cocientes serían positivos, ya que negativo entre negativo da positivo.

La explicación del profesor se apoya en el triángulo rectángulo y establece una comparación a/b , donde le da significado al cociente de variación.

Posteriormente, los tres profesores usaron esta explicación del cambio de la recta secante a la curva.

Extracto 5.29

P: En esta curva los puntos P y Q , dijimos que esa recta es una secante a la curva. Si nosotros hacemos que Q se desplace sobre la curva hacia P , cuando P y Q coincidan, ¿qué va a suceder con la recta? Va a dejar de ser una recta secante para transformarse en... Es decir, si claváramos la primera (...) y hacemos que Q se vaya desplazando hacia P sobre la curva cuando P y Q coincidan, la recta va a dejar de cortar a la curva en dos puntos; ya no es una secante, sino se transforma en una tangente. Cuando P y Q coincidan la recta va a dejar de tocar a la curva en dos puntos para hacerlo en uno solo, ¿verdad? Y en ese momento vamos a decir que la recta va a dejar de ser una secante para transformarse en una...

Am: Tangente

B (Gpo-1), p. 153.

Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la gráfica, las rectas secantes correspondientes giran en torno a P y se acercan a la recta tangente (T).

Después de hacer referencia a las pendientes, los profesores expresan tal proceso en términos formales, como $m = \text{tg}\theta = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Esta explicación la dan los tres, aunque en este fragmento se pone como ejemplo al maestro Alberto.

Extracto 5.30

P: La tangente, y eso que acabamos de decir, eso que el punto Q se acerca hacia P se escribe como el límite. Entonces cuando $\frac{dy}{dx} = \text{tg}\theta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$, el límite dice $\Delta x \rightarrow 0$. Indica que el punto Q se acerca a la P . En ese momento lo que está sucediendo es que... como no vamos a decir que el punto P o el punto Q es el que se acerca o mueve solo en la curva sobre la curva (...), entonces Δx tiende a ¿qué? A la derivada (...) y ¿qué cosa es realmente esa derivada? Bueno si ustedes se fijan, la derivada no es más que la tangente... ésta es la tangente: la derivada de y no es más que la pendiente de la recta tangente, es decir, que la derivada de y con respecto a x no es más que la tangente.

A (Gpo-1), p. 71.

Cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva (C), hace que $x + \Delta x$ tienda a x . Si la pendiente de m_{PQ} tiende a un número (m), entonces se define la tangente (T) con la recta que pasa por P con pendiente m .

Los profesores trabajan implícitamente la noción de variación como un incremento infinitesimal o como la razón de dos infinitésimos (cociente de variaciones) y sus explicaciones son algebraicas.

En el siguiente fragmento, se muestra la explicación del profesor a través de la notación $\frac{df}{dx}$. Si se varía la x , se pregunta cómo cambia la función o, equivalentemente, si cambia la x , cómo se modifica la función.

Extracto 5.31

P: Este símbolo $\frac{df}{dx}$ dice mucho sobre lo voy a leer: Si variamos la x , ¿cómo cambia la función? Es lo que dice aquí la gráfica, no sé si estén de acuerdo. Si la x es 1 y la variable ahora se llama 2, ¿cómo varía la función? la función se llama ahora F de 2, así se puede leer esto. Si tú varías la x ¿cómo se transforma la función? O también puedes leerlo así: si cambias la x , ¿cómo va a cambiar la función? Para mí ésta sería una forma más correcta de hablar sobre derivadas; o sea, aunque cueste más trabajo sería más correcto hablar así que decir simplemente: 'la derivada de F con respecto de X '. Se pierde mucha información. En cambio, si digo: Si yo varío la Z , ¿Cómo cambia la función? Si yo varío la R , ¿Cómo lo hace la S ?

C (Gpo-1), p. 77.

El profesor afirma que ésa es la forma correcta para hablar sobre derivadas, aunque cuesta más trabajo, y no decir simplemente $f'(x)$. Así, en su opinión, se debe expresar la variación de los valores del cociente. De igual manera le da significado a la expresión, df/dx donde las derivadas son vistas como co-variación o comparación a/b .

- Comparación y resta

Aquí el profesor ofrece una breve introducción a la diferencial, dice (toma un cuaderno de apuntes y escribe la definición en el pizarrón).

Extracto 5.32

P: Vamos a dar una breve introducción de lo que es la diferencial. Aquí dice: "Supongamos que la función " f " se define por $y = f(x)$, o sea, ésta. Entonces cuando $f'(x)$ existe, es decir, la derivada. Cuando existe la derivada de esta función $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$; donde $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, dice el límite Δy cuando $\Delta x \rightarrow 0$; es decir, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, el cociente debe ser $\Delta y / \Delta x$ Cuando esto se hace cada vez más pequeño ¿qué va sucediendo con el punto Q ?

As: (...)

Am: Se va acercando a P

P: Se va acercando al punto P y en el límite, entonces, la pendiente de la secante que era $\Delta y / \Delta x$ ahora será P . Fíjense bien

Am: Ahora será la derivada del límite

P: Ahora será la derivada de la pendiente de la recta tangente. Entonces se supone que si el límite existe, ¿verdad? Porque puede ser que no exista, me pueden decir, cuando f' exista, pero no la derivada, entonces no podemos hablar de esto. Debe de existir la derivada. Donde $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, ya lo dijimos, si cambia al índice Δy lo podemos escribir como $f(x)$. Ahora ¿quién es Δy ? por aquí lo pueden ustedes observar. Es exactamente esta magnitud y es la diferencia de $f(x+\Delta x)$. Es decir, la imagen de $x+\Delta x$, es este valor menos $f(x)$; que es la distancia entre la derivada (...) si ustedes le restan esta cantidad a $x+\Delta x$ le están restando una cantidad menor, que es exactamente este punto, el punto Q y el punto P (...) y si quiero esas dos cantidades debo de (...)

As: (...)

A (Gpo-1), p. 123.

En la explicación del diferencial aparece la comparación de cantidades, esto es, el cociente de $\Delta y/\Delta x$. Después de dar la definición formal, el docente pregunta: “¿qué va sucediendo con el punto Q ?”, para propiciar la interacción. Primero se escuchan murmullos y luego un alumno da la respuesta: “Se va acercando a P ”. El docente acepta la respuesta y la reformula, al decir: “se va acercando al punto P ”, en vez de: “se va acercando a P ”. Y completa la explicación: “se va acercando al punto P y en el límite, entonces, la pendiente de la secante que era $\Delta y/\Delta x$, ahora será P ”.

Cobra relevancia la explicación que proporciona el docente cuando compara las magnitudes. Hace una diferencia de las imágenes de $x+\Delta x$, que sería $f(x+\Delta x)$ y la imagen de x , $f(x)$. Dice que se resta una cantidad grande ($f(x+\Delta x)$) a una pequeña $f(x)$, eso es Δy .

Luego continúa con la definición de lo que ahora será la derivada de la pendiente de la recta tangente, donde delimita el valor absoluto $|\Delta x|$, que es suficientemente pequeño, $f'(x)+\Delta x$, (eso es una buena aproximación para el valor de Δy). Finalmente, usa el símbolo \cong para expresar que es aproximadamente igual a $\Delta y \cong f'(x)dx$. Cabe aclarar que es el único docente que aborda el tema de los diferenciales.

Los profesores trabajan implícitamente con la noción de variación, aunque de manera algorítmica. En sus explicaciones aparece la variación como un incremento infinitesimal y como una variación funcional a manera de una resta.

En la siguiente explicación de la segunda derivada, el profesor pregunta que, si se hace un cambio en las X , cómo varían las pendientes de la función $\frac{d^2f}{dx^2}$, que es de segundo orden.

Extracto 5.33

P: Voy hacer un cambio sobre las X ¿Cómo cambian las pendientes, si antes era la función $\frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$ y ahora son las pendientes $\frac{d^2f}{dx}$? Hago un cambio sobre las X y pregunto, ¿cómo cambian las pendientes? El matemático, en vez de escribir todo esto, dice: pues eso lo que significa es derivar dos veces, porque aquí derivaste y aquí te está diciendo que derives otra vez.

C (Gpo-1), p. 96.

En su discurso el docente siempre alude al matemático, porque él es físico; por eso afirman que para un matemático la segunda derivada consiste en derivar dos veces. Hace una comparación de cocientes cuando plantea que, si varían las X, cómo cambia la función “f”.

La representación o modelo que utiliza el profesor para explicar la derivada es por medio de la comparación de a/b (significado del cociente de variación).

Resumiendo

Los profesores trabajan explícita o implícitamente la noción de variación, aunque sea de forma algorítmica. Le dan significado al cociente de cambio; y expresa en fórmulas, la variación como un incremento y la variación funcional como una resta o como un incremento infinitesimal. El profesor Carlos es el único que explica y le da significado a la segunda derivada, mientras que los profesores Bruno y Alberto, la abordan como una derivación de segundo orden por medio de ejemplos en forma algorítmica. Ninguno explica ni ejemplifica las derivadas de tercer orden. En general, los ejercicios que plantean se resuelven de forma algorítmica, aplicando las reglas de derivación.

Conclusiones de capítulo

Se logró identificar una diversidad de perspectivas en las explicaciones de los profesores sobre la noción de función, así como sus ideas acerca de la variación, como la de parámetros -rota, traslada, la sube- o la asignación de un significado geométrico a las funciones (traslación, inclinación, rotación, desfaseamiento, sube o baja, crece o decrece).

Además, los docentes le atribuyeron nociones de movimiento a las gráficas y a puntos de referencia como el vértice, el origen o la asíntota (dieron las expresiones se desplaza, sube o baja, se recorre, se muere o corrimiento). También aproximaron valores a un número, df/dx a través de los valores del cociente o de un punto de referencia, así como la sucesión de puntos intermedios. Se considera que la estrategia de mover un punto de referencia (el vértice, el origen o la asíntota)

fue de gran importancia para que los profesores construyeran sus explicaciones en torno al movimiento de la gráfica y, de ahí, enfatizarán el papel de la noción de variación.

Para elaborar sus explicaciones, se auxiliaron de una función básica, como $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$ y $f(x)=\text{sen } x$, entre otras.

Durante las clases surgieron cinco tipos de explicación en las que pudo apreciarse la noción de variación:

- El modelo numérico
- El modelo de la representación geométrica
- El modelo algebraico
- El modelo de la comparación a/b
- El modelo del lenguaje natural

Estas formas de explicar la noción de variación en aula, se crean bajo el discurso construido tanto por el maestro como por sus alumnos, atendiendo a la especificidad del saber en juego. Según se sostiene en la teoría de las situaciones didácticas, donde se destaca el hecho de que la situación de aprendizaje genere una serie de interacciones que hagan funcionales la comunicación y el intercambio de ideas. En tal sentido, los episodios analizados en el aula están estrechamente ligados con la búsqueda de una explicación satisfactoria para los actores de una interacción didáctica.

Es notorio que en las situaciones de enseñanza analizadas se dan sobre la base de un conjunto de relaciones entre docente, alumnos y conocimiento, lo que es un supuesto básico de la teoría. Estas relaciones interesan al estudio, pues son la base de las explicaciones portadoras de conocimiento, el profesor explica al alumno con base en el *milieu*, al hacer uso de cada uno de los elementos a su alcance en el momento dado, como fue el caso de una “media naranja”, “jalar la onda”, “subir el vértice”, etc. Este hecho, es una característica notable en el fenómeno de envejecimiento, pues se acude a los recursos disponibles del maestro y de los alumnos al cambiar la explicación, ésta inevitablemente envejece en la medida en que se usa.

Se producen modificaciones de las explicaciones con base en la interacción, la cual es propiciada por una búsqueda de complementariedad entre las versiones de los alumnos y la del maestro. Las intervenciones del profesor con la doble función de solicitar explicaciones y tratar de orientarlas regulan el curso de la clase. La situación de enseñanza se modifica a través del empleo de explicaciones situadas.

La noción de variación, que es el centro de estudio de este libro, se apoya fuertemente en la de variación numérica y el modelo más socorrido fue el de la tabla

de valores. Insistimos en que estos recursos no forman parte de lo que típicamente se considera el contenido matemático de una clase, sino son los recursos con los que se amalgama la explicación en aula. La función no es la tabla, ni la fórmula, ni la gráfica, sino una relación de correspondencia específica. Su representación no es el concepto, pero es a través de éstas que el profesor lo hace aparecer en clase.

Respecto del fenómeno didáctico de envejecimiento de las situaciones de enseñanza los profesores interactúan constantemente con los alumnos mediante el uso del saber, explicado, o bien de la explicación didáctica en el sentido de Sierpinska. Esto ocurre con mayor intensidad cuando se trata de la noción de variación. Ésta no es objeto explícito de la enseñanza, en la medida en que no es introducida al aula mediante una definición, ni es tratada en los libros de manera explícita ya que no se trata de una caracterización categorial. Su aparición es junto con el lenguaje de uso, lo cotidiano que brinda el contexto, varían cosas relativas a la física, la ingeniería, etc. y ello es trasladado al juego de discursos formales y no formales. Este hecho hace que el envejecimiento sea más rápido, pues la cantidad de inciertos o eventualidades es mayor que cuando se introducen conceptos categoriales.

Son la generalización, o sobre generalización, la analogía, la repetición sistemática, la reformulación y el cruce de lenguajes los factores que consideramos que más contribuyen al fenómeno de envejecimiento basado en las explicaciones. Cuando por ejemplo el profesor, como vimos en uno de los episodios, intenta generalizar al decir que, “dependiendo del grado del polinomio, [se sabrá cuántas] son las veces que cruzará el eje X”, está haciendo una generalización incorrecta que ocasionará problemas al estudiante si las toma al pie de la letra, pues pronto encontrará contraejemplos; ello exige cambios en las explicaciones del profesor.

El estudio sobre el papel de la explicación en la clase de matemáticas, intenta localizar, analizar y explicar cómo se desarrolla el fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza. Estos pasajes, descritos anteriormente, muestran que el origen del cambio en la explicación del docente puede ser múltiple y muy complejo. Por ejemplo, el empleo de una generalización no válida, la repetición exhaustiva de un argumento o la combinación de lenguajes inducen factores de cambio en el discurso del profesor y muy particularmente en sus explicaciones. Al nivel teórico, ahí se encuentran las raíces del envejecimiento.

Cuando el profesor demanda que los alumnos expongan su opinión, a través de preguntas motiva intervenciones explicativas y resulta de sumo interés para los alumnos poder “mover” o “desplazar” el vértice de su posición inicial. El profesor intenta generalizar que, si a la función básica le suman una cantidad, la gráfica se desplaza hacia arriba, y si le restan, hacia abajo.

2. La explicación y el contexto institucional

En el salón de clases surgen diversas alternativas explicativas sobre los temas abordados; tanto el profesor como los alumnos intentan construir versiones del contenido escolar a partir de su propia óptica. Los participantes aportan sus explicaciones para entender y poder orientar los acuerdos entre ellos, una situación que se produce frecuentemente con base en los contextos profesionales de la especialidad de la ingeniería que se estudie, o bien con base en la especialidad relativa a la experiencia profesional del docente fuera de aula.

Por ello, la explicación del profesor se nutre fuertemente con expresiones cotidianas de un campo disciplinario específico, abandonando en cierta medida el discurso tradicional de una clase de matemáticas. Este tipo de recursos fue empleado de manera consistente en los episodios que analizamos.

Un aspecto importante en la formulación de explicaciones por parte de los docentes ha sido la necesidad de situarse en contextos donde puedan hacer aplicaciones que atañen a la carrera de sus alumnos, como se mencionó en el capítulo anterior. La cultura matemática escolar no se refiere exclusivamente a los acuerdos sociales alcanzados ni a los consensos construidos por una cierta comunidad didáctica, ya que precisan de niveles de institucionalización que vinculan el saber escolar con su correspondiente saber erudito.

Lo cultural, en el caso que nos ocupa, implica que aquello que se aprende esté cerca de lo que da significados. Entonces, lo significativo del conocimiento estará asociado tanto con el contexto donde se presenten las explicaciones como a la estructura matemática de los conceptos. A continuación se presentan algunas secuencias ilustrativas al respecto.

En el siguiente fragmento, el profesor explica un ejemplo que abordó en otro grupo de primer semestre de ingeniería en electrónica, donde la función representa una señal eléctrica o electromagnética, magnética o acústica, a la cual le llama *onda*, mientras que el movimiento de un punto (desfasamiento) es la variación de un punto de referencia (vértice).

Extracto 5.34

P: Hace en momento estaba trabajando con los muchachos que quieren estudiar ingeniería en electrónica y nosotros a esto le llamamos desfasamiento ($f(x)=(x+1)^2$). Para nosotros, esta función representaría una señal eléctrica, electromagnética, magnética o acústica, e indistintamente la llamamos onda. Algunos estamos familiarizados con las ondas eléctricas y ésta es una onda. Entonces, yo pongo un ejemplo y digo: ‘esta expresión matemática representa una onda’. Ahora, la pregunta es: ¿hacia dónde se mueve la onda?

As: ¡Hacia la izquierda!

P: Hacia la izquierda. Entonces, el ingeniero ya sabe hacia dónde se mueve la onda viendo una ecuación matemática, fíjense. Él ya sabe lo que ocurre en la naturaleza con el uso de una simple ecuación matemática.

C (Gpo-1), pp. 12-13.

El docente pregunta sobre la dirección del movimiento de la onda y la mayoría de los alumnos responde: “¡Hacia la izquierda!” Para el profesor resulta evidente que el ingeniero ya sabe hacia la dirección de la onda con la observación y análisis de una ecuación matemática; ya conoce el papel de una ecuación matemática como modelo de la naturaleza. Con este comentario, da por hecho que los ingenieros reconocen inmediatamente esa particular interpretación de las funciones.

Aquí se presentan dos tipos de explicación en las que aparece la noción de variación: la de la representación gráfica y la del lenguaje natural del desfase. En el extracto siguiente, el profesor se sitúa en el contexto (comienza a decir cómo utiliza el físico esto, ya que él tiene esa formación) y les pregunta a los alumnos “*qué van a ser*”, refiriéndose a la carrera que cursan. Ellos responden que serán bioquímicos. Ante esta respuesta, el maestro les da el siguiente ejemplo:

Extracto 5.35

P: Ahora fíjense cómo utiliza el físico esto. ¿Ustedes van a hacer qué?

As: ¡Bioquímicos!

P: Ustedes agarran este líquido... ¿Cómo le llaman?

As: (*Risas*)

P: Agarran un microbio y, por ejemplo, quieren saber cómo actúa y se reproduce a través de una sustancia ácida. Entonces, hacen el experimento y van cambiando tanto la sustancia como el color de ese microbio, observan cómo se reproduce, después lo tabulan y la gráfica resulta ser ésta. Pero el que te dejó esta tarea o trabajo te dice: ‘yo no quiero solamente la gráfica; quiero que tú me digas cuál es la función’, porque si yo trabajo con la función la derivó, integro, maximizo o minimizo, le indico el punto de inflexión, su energía tabulaciones. Entonces, yo quiero que le des la ecuación de la gráfica en pocas palabras; tú quieres saber es a qué función se parece. Ésa es tu tarea: ¿a qué función se parece? Entonces le aplicas una, dos, tres, cuatro, cinco, ¿qué vas a pensar? ¿Qué polinomio puede ser?

As: Cinco.

C (Gpo-1), pp. 25-26.

Este ejemplo consiste en “agarrar” un microbio y ver cómo “actúa” a través de una sustancia ácida, hacer el experimento y observar cómo van cambiando la sustancia y el color de dicho microbio, al igual que la manera en que reproduce. Dicho fenómeno se puede constatar con una tabla de variación, ya que muestra la relación entre las dos cantidades. Se construye también la gráfica que relaciona las variables, aunque el docente indica lo que se quiere saber; en este caso, a qué función conocida se parece la gráfica obtenida y cuál es el grado del polinomio. El discurso surge cuando el profesor explica la relación que guarda el número de veces que una gráfica cruza al eje de las X con relación al grado de la función polinomial respectiva. Intenta situarse en el contexto de los bioquímicos al poner como ejemplo al microbio.

A continuación, el profesor propone un ejercicio donde a menudo se utilizan funciones trigonométricas de la forma $y = a + b \operatorname{sen}(t - t_0)$ como modelos ecológicos para simular fenómenos con comportamiento periódico, como la *variación* de la temperatura, la amplitud de las mareas o el horario de verano.

Extracto 5.36

P: Bueno, dice así: a menudo se utilizan funciones trigonométricas de la forma $y = a + b \operatorname{Sen}(t - t_0)$, donde a , b son constantes, como modelos ecológicos para simular fenómenos que ocurren periódicamente, como la variación de la temperatura, la amplitud de las mareas, la figuración de los días... Ha de ser ahora, ¿no?, el horario de lunes a martes, el horario de verano. Hay días en que el día es más largo que la noche como éste, ¿no? Supóngase que entonces está así: $T(t) = 70 + 10 \operatorname{Senp} 7/12(t - 9)$ representa temperatura.

Demuestre que $T(t + 24) = T(t)$

¿En qué momento T con intervalo va a ser $y = 24$, en el intervalo que va a ser seno 24 en $T(t) = 70$?

¿Cuál es la temperatura máxima? ¿En qué momento, entonces está al revés en el intervalo de 0 a 24? ¿En qué momento ocurre?

¿Cuál es la temperatura mínima? ¿En qué momento del seno, en el intervalo de 0 a 24, ocurre el mínimo?

Bueno si es cierto en el inciso a, ¿Cuál es el periodo de t de la función T ?

B (Gpo-1), pp. 141.

El docente plantea preguntas en torno de la función propuesta a fin de conocer el comportamiento global de la gráfica. Al abordar el tema de funciones trigonométricas, el profesor menciona a sus alumnos que deben tener presentes estas funciones, porque serán ingenieros electrónicos. Les dice que se van a encontrar

con una diversidad de señales, como la “diente de sierra”, un segmento de recta con ángulo de inclinación de 45 grados; las parábolas del tipo “rectificador de media onda”, las cuales son hacia abajo, y las señales cuadradas donde va apareciendo un intervalo, que es una función constante $f(x) = c$ invertida dentro de un intervalo.

Extracto 5.37

P: ¿Cómo será la cosecante? La cosecante debe ser una función, fíjense bien, la cosecante debe ser a $1/\text{sen } x$. Entonces, ¿cómo creen ustedes que debe ser la función $f(x) = \text{csc } x$?

Am: Uno sobre (...)

P: Bueno, mejor no me digan. Traten de interpretar cómo sería la gráfica de la cosecante... ¿más o menos será como ésa o tiene otro formato? ¿Qué tal si en un examen les ponen una gráfica? Ustedes qué van a contestar: ‘ésa nunca la vimos’, ¿no? [...] Les digo esto porque es muy importante. Ustedes, como ingenieros electrónicos, se van a encontrar con una diversidad de señales como las de este tipo, que son rectas de 45° y se les llama un diente de sierra; hay otro tipo de señales, por ejemplo, 1, 90, esas son parábolas. ¿Qué significarán? ¿Alguno lo conoce? Es la señal de un rectificador de media onda. Ustedes pueden observar que esto no es más que una parábola y va hacia abajo. Luego hay otras señales en forma de x que son señales cuadradas, donde supuestamente va apareciendo el intervalo, es una función constante invertida dentro de un intervalo y no es más que una función $f(x) = c$ de una constante, ¿verdad?

Por eso insisto tanto en la interpretación de una función porque se van a encontrar con una diversidad de funciones y deben preguntarse si representan una recta, una parábola, una constante, una secante o una tangente. Bueno, entonces, ¿cómo será esa gráfica $f(x) = \text{csc } x$?

A (Gpo-1), pp. 59-60.

El profesor insiste en la interpretación e identificación de las funciones, ya que dice que los alumnos se van a encontrar con una diversidad de funciones. Retoma el tema de la clase y pregunta: “¿cómo será la gráfica de $f(x) = \text{csc } x$?”

En la relación didáctica emergen diversas alternativas para explicar los temas tratados. El profesor, por ejemplo, siente la necesidad de brindar a los alumnos una serie de ejemplos que se relacionen con su experiencia profesional futura, es decir, con su especialidad. Su explicación se apoya fuertemente en las expresiones cotidianas de un campo disciplinar específico, abandonando en cierta medida el discurso tradicional de una clase de matemáticas, y privilegia tanto el modelo geométrico como el del lenguaje natural.

- El contexto y la derivada

Cuando aborda el tema de máximos y mínimos, el profesor afirma que podría surgir una pregunta muy difícil: “¿para qué sirven los máximos y mínimos?”. Para contestar a tal cuestionamiento, ofrece una explicación de una función que representa los costos de producción y se requiere de conocer el costo máximo de producción para cierta cantidad de artículos. Asegura que éste sería el costo de producción o el costo mínimo (lo explica mediante una gráfica). Da otro ejemplo sobre cuáles serían los niveles de población en ciertas regiones del país (también lo ilustra con una gráfica) y dice que con este tipo de gráficas se puede determinar qué regiones tienen una máxima y una mínima población de una manera rápida.

Extracto 5.38

P: Podría surgir una pregunta muy difícil. ¿Para qué sirve esto? La respuesta podría ser: la función podría representar los costos de producción. Entonces, usted quiere saber el costo máximo de producción para cierta cantidad de artículos, éste sería el costo máximo de producción y ése el mínimo de producción, lo cual repercute en el aspecto económico. Podría ser en niveles de población, en el eje de las X regiones del país. Entonces, con este tipo de gráficas yo podría determinar qué regiones tienen máxima y mínima población de una manera rápida. Podríamos tener una reacción química donde esto me representará la energía de la reacción en un respectivo tiempo; entonces, podríamos observar dónde existe la máxima energía y en qué tiempo sobre la reacción hay un máximo de energía, ya sea disipada o consumida. O sea, nosotros ya en ingeniería le daríamos el contexto que fuera necesario, por eso es importante el tema de máximos y mínimos y de ahí que aparezca siempre como parte de los cursos de Matemáticas I, bueno al menos de Cálculo I.

C (Gpo-1), p. 92.

En el último ejemplo, el maestro pone una reacción química en que se podría observar dónde existe la máxima energía y en qué tiempo sobre la reacción hay un máximo de energía disipada o consumida. Señala que en ingeniería se les da el contexto necesario y enfatiza en la importancia del tema de máximos y mínimos.

El profesor recurre a ejemplos para explicar algunos contenidos matemáticos del curso; ésta es una manera de ofrecer a los alumnos ilustraciones que hagan visible la utilidad de los conceptos. A fin de validar sus explicaciones, el docente privilegia el modelo de representación geométrica, que sirve para visualizar movimientos y economiza la toma de decisiones.

Las explicaciones extramatemáticas, como la de la economía en la toma de decisiones, obedecen a factores típicos de la búsqueda del consenso; se quiere

construir un acuerdo sobre la base de la potencia matemática para la ingeniería. Estos argumentos caracterizan al discurso de la matemática en la ingeniería dentro de las asignaturas estudiadas y favorecen la adaptación permanente de los ejemplos al contexto del alumno, independientemente de que se trate del mismo concepto. Tal hecho colabora en el fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza. En el tema de razón de cambio instantáneo, el profesor explica que una razón es una comparación por medio del cociente de dos cantidades y da los siguientes ejemplos: “Un móvil que se desplaza a 120 km/h recorre tal distancia en 2 horas; la razón es: $\frac{120}{2} = \frac{60 \text{ km}}{1 \text{ h}}$, que se podría interpretar como el recorrido del móvil a una velocidad de 60 km/h. El docente formula la siguiente pregunta para generar la interacción: “¿Qué quiere decir 60 a 1?”. Un alumno dice: “Por cada 60 km que recorrió un móvil, lo hizo en una hora”. La respuesta es aceptada por el docente.

Extracto 5.39

P: Una razón es una comparación por cociente de dos cantidades, ¿verdad? En un determinado momento, ¿esa razón qué me estaría pidiendo? Por ejemplo, si un móvil se desplaza a 120 km/h y recorre tal distancia en 2 horas, entonces tendríamos que la razón es, en la distancia-tiempo, 120 a 2 o 60 a 1. Se podría interpretar que los recorrió a una velocidad de 60km. /hora, ¿no? ¿Qué quiere decir 60 a 1?

Am: Que por cada 60 km que recorrió un móvil transcurrió una hora.

P: Que por cada 60 kilómetros que recorrió un móvil pasó una hora. Si yo hablara del resultado de un encuentro de fútbol entre dos equipos y la razón de los resultados del equipo A al equipo B es de 4 a 2 y los comparo con cocientes, entonces eso me daría como resultado, si lo simplifico, 2 a 1. ¿Qué interpretación le podría dar a eso? Que la razón de los resultados fue 2 a 1. Que por cada anotación del equipo B, el A anotó 2, o que por cada 2 anotaciones que hizo el A, el B anotó uno. Una razón es la forma de medir, ¿verdad?, o de comparar...

B (Gpo-1), p. 163.

Otro ejemplo que proporciona el maestro trata del resultado de un encuentro de fútbol entre dos equipos. La razón de los resultados del equipo A al B es de 4 a 2; al comparar los cocientes, la interpretación es de 2 a 1. Que por cada anotación del equipo B, el A anota el doble. El docente concluye que una razón es una forma de medir o de comparar, aunque abandona la idea de la variación.

Es interesante observar cómo el docente vierte sus explicaciones para buscar un marco contextual ficticio. Hemos mostrado ejemplos donde los profesores organizan discursivamente sus conocimientos y emplean explicaciones que les

den coherencia y los hagan convincentes; e incluso aluden a las profesiones para explicar ciertos contenidos matemáticos en el salón de clase. Por ejemplo, en el siguiente fragmento el profesor señala que el matemático explica la derivada de forma algorítmica, mientras que el ingeniero afirma que, si hay un cambio en x , impacta en y .

Extracto 5.40

P: El matemático te enseña hablar $\frac{df}{dx} = 2x$, pero el ingeniero recurre a otro lenguaje. Yo te digo la función de $f(x) = x^2$; ahora, si hago un cambio en x , provoca una modificación, ¿de qué forma? De la forma $2x$. **O** también yo puedo hablar así: tengo una función $f(x) = x^2$; si yo hago una variación en x provoca que las pendientes cambien de la forma $2x$.

C (Gpo-1), p. 95.

El docente enfatiza en las diferencias del lenguaje entre el matemático y el ingeniero, como consta en el siguiente fragmento:

Extracto 5.40

P: Como se supone que ya saben derivar la aplicación empírica, tendríamos que trabajar la interpretación numérica. La razón de cambio, eso lo ven los físicos, pero ustedes no llevan física. ¿No hay preguntas? Ya ven, no que no sabían nada, ¿no?

B (Gpo-1), p. 186.

El profesor señala que los físicos estudian la razón de cambio y les dice a sus alumnos (futuros ingenieros) que no llevan física en ese semestre. Les precisa que ya saben derivar de manera empírica (refiriéndose a la aplicación de las fórmulas de derivación) y que tendrían que trabajar la interpretación numérica.

Observamos que los profesores, dependiendo de su formación y de la carrera de sus alumnos, utilizan un lenguaje y ejemplos determinados. Esto tiene que ver con el contexto institucional o con la profesión, entre otros elementos, y pueden explicar ciertos fenómenos ligados con el aprendizaje.

3. El papel del ejemplo en las explicaciones del profesor

Los ejemplos, juegan un papel importante en la explicación y pueden ser la base para la comprensión de un enunciado general. Además, dota de una riqueza de información, datos o elementos a una situación. Se ha constatado que los profesores

se auxilian de diversos ejemplos para convencer a los alumnos o lograr que sigan la secuencia de una clase con miras a establecer una negociación. Estos ejemplos, que pueden basarse en algoritmos o gráficas, ayudan a que las explicaciones del docente tengan fundamento y en ocasiones recurren a un lenguaje cotidiano.

Veamos cómo el profesor brinda la siguiente explicación al grupo a través de un *ejemplo*, tras proporcionar la definición formal de función. Aquí se relacionan las variables con nociones como costos y gastos de un producto, ya que el cambio de alguna variable se reflejará en las ganancias.

Extracto 5.41

P: Vamos a ver funciones reales de variable real. Tenemos el concepto de función y ¿para qué me sirve? Bueno, tenemos que hacer las relaciones que necesita un ingeniero y nos lleva a una función; posteriormente, a la derivada e integral. Por ejemplo, yo tengo en demasía productos que dependen de la temporada, de costos y de gastos para saber las ganancias. Hacemos una tabla primero, lo planteo así (dibujo de conjuntos), después con puntos y luego los uno, pero hay que investigar de qué manera (gráfica). ¿Cómo encontraría una relación matemática de esto? Eso es un problema muy grande... Lo que hago es un modelo matemático que se da a través de una expresión, por ejemplo, $f(x)=x^2+1$.

C (Gpo-1), p. 1.

Aparece la idea de tabulación, esto es, la variación numérica, ya que el número ordena puntos y surge la necesidad tanto de investigar de qué manera se unen los puntos para formar la gráfica como de encontrar un modelo matemático a través de una expresión (en este caso, la función). Hubo tres modelos para representar la variación como tabulación, como representación geométrica y como expresión algebraica o fórmula explícita.

El profesor debe situarse en algún contexto para que su explicación sea más convincente y el alumno se interese en el tema de las funciones. Dicha explicación se da a través de un ejemplo ya abordado en el extracto 5.2, donde el docente ofrece la definición de función lineal en forma del polinomio $f(x) = a_0 + a_1x$ y la ecuación de la recta $f(x) = x$, la cual, asegura, es la más conocida. El ejemplo que presenta después de explicar la definición es el de la función $f(x)=2x+3$.

Extracto 5.42

P: Escrito en forma de polinomio sería $f(x)=a_0+a_1x$, con grado $n=1$. Sería otra forma de expresarlo, aunque significa lo mismo para nuestro caso. Nada más que para ustedes es más conocida la ecuación de la recta, por eso la escribo en la forma $f(x)=x$, que es equivalente a ésta. Podemos describirlos como una ecuación lineal; por ejemplo, dice $f(x)=2x+3$. Yo creo que ustedes conocen la recta, ¿verdad? Quiénes no conocen la recta ni su dominio, que es todos los números reales: $f(x)=x$. Algunas veces, acuérdense bien, la imagen también se puede escribir como Y . La forma más simple para trazar una recta $y=2x+3$ ¿qué necesita? ¿Cuál es el requisito mínimo para trazarla?

Am: Dos puntos.

Am: Que tenga 2 puntos.

A (Gpo-1), p. 21.

El docente pregunta cuál es el requisito mínimo para trazar la recta; dos alumnos responden que dos puntos.

Una vez que el docente introduce la definición de función lineal, propone un ejemplo en el que los alumnos puedan tabular, o graficar, para así constatar que se trata de una función lineal. Esto constituye una forma de involucrar al alumno en la situación a través de técnicas simples que ya dominan y su aparición obedece a una necesidad de comunicación. Provee al estudiante de la sensación de aprender y al profesor de la de enseñar.

En otro caso, tras explicar la definición formal de la derivada, el profesor formula el ejemplo $f(x)=2x+2$, que es una función lineal, y lo explica paso a paso para sustituir valores y calcular la derivada por medio de la regla de los cuatro pasos.

Extracto 5.43

P: Vamos a hacer un ejemplo... éste.

Af: Uno difícil.

P: Una recta $f(x)=2x+2$. ¿Cuál es su pendiente?

Am: 2.

P: Muy bien, su pendiente vale 2, o sea, si yo la evalúo en 0 vale 2 y en 1 vale 4. La pendiente vale 2. Yo voy a calcularle su derivada, o sea, voy a variar la x , y me va a decir cómo cambia la función $\frac{df}{dx}$. Esto significa límite de Δx , cuando $\Delta x \rightarrow 0$ de $f(x+\Delta x)-f(x)$ se divide entre Δx , entonces sustituyo. Aquí dice que escriba la función evaluada de $x+\Delta x$, que evalúe $x+\Delta x$. ¿Qué voy a poner?

Am: $2x$.

C (Gpo-1), p. 77.

Aquí, el profesor compara de valores del cociente; varía la x para ver cómo cambia la función ($\frac{df}{dx}$).

Se observó en las clases que, después de un tratamiento formal de la noción de función y de la derivada, el paso siguiente fue ejemplificar los conceptos a través de recursos familiares para el alumno.

Los ejemplos son un recurso imprescindible que utilizan los docentes (y en ocasiones los alumnos) durante sus explicaciones en clase, y son el punto de partida para que el profesor generalice. Un ejemplo es siempre enriquecido dentro de una situación que contiene más elementos o datos, y esta información relata al concepto o definición ejemplificada. El método de ejemplos paradigmáticos no es realmente un método de enseñanza; más bien constituye una manera en la cual los conceptos están siendo formados (Sierpinska, 1994). La explicación verbal proporcionada por el maestro no necesariamente es aceptada como tal por los alumnos; en tal sentido, no se trata de una explicación compartida.

4. Construcción compartida de las explicaciones con base en la interacción

Además de las intervenciones explicativas por parte del maestro que se han presentado en las secciones anteriores, debe analizarse su efecto en la estructura de la clase a más largo plazo, esto es, en la interacción discursiva con los alumnos; mostrar cómo se construyen y negocian las explicaciones en el diálogo docente-alumnos.

En esta parte, conjuntamente con lo señalado en los párrafos anteriores, se expone claramente el papel que juegan las interacciones en la modificación del discurso del profesor. Su estudio sistemático ha sido catalogado como un fenómeno conocido como *envejecimiento de las situaciones de enseñanza ligado a la transposición didáctica*.

Si se toma como objeto de estudio a la construcción de significados a través de las explicaciones, su carácter interactivo demanda que las unidades mínimas de análisis sean secuencias de interacción y no frases o mensajes descontextualizados, como apunta Candela (1999). Así, el problema planteado condiciona las características de las unidades de análisis, siendo el objeto de estudio la construcción de conocimiento y los significados sobre la variación.

Se describe la clase a través del contenido temático y de la secuencia de actividades que se desarrolló para tratar un tema en una o dos horas de trabajo, y se eligen las secuencias discursivas donde se podían identificar las actividades y explicaciones de los profesores frente al contenido cuando aparecía la noción de variación. En cuanto a los extractos, formaron parte de las clases o sesiones de un primer semestre de ingeniería.

A continuación, se analizan varias secuencias de interacción de una misma clase para estudiar con detalle la manera en influyen las intervenciones puntuales en la construcción de una explicación. Se ahondará en tres secuencias, una por grupo.

El siguiente extracto se caracteriza por las interacciones típicas del aula, ya que el profesor afirma y pregunta, mientras que el alumno completa y responde. Resulta interesante el análisis del discurso interactivo cuando se grafica la función $f(x)=-x^3+3$, y posteriormente se generaliza con la función $y(x)=-(x-3)^3-3$, por medio de lo que el docente ha denominado “técnica de graficación”. En un principio vierte sus explicaciones acerca de lo que le hace el 3 a la gráfica de la función, y no demanda la participación de los alumnos.

Extracto 5.44

P: ... Bueno, si no existen más comentarios, quisiera que intentemos esta gráfica:

$$f(x)=-x^3+3.$$

Am: A la izquierda.

P: Exacto, ahí está, la movió...

As: ¡Hacia la izquierda!

P: A ver, fíjense, síganle pensando. ¿Qué le hace?

Am: La sube.

P: Su compañero dice que hay que subirla. Usted ¿qué dice?

Af: Que hay que moverla hacia la derecha.

P: Hay que bajarla hacia la derecha. Les voy a escribir el ejercicio anterior, fíjense compañeros. Contéstenme nuevamente: ¿hacia dónde la muevo?

As: [...]

P: Allá atrás. ¿Hacia dónde la muevo?

As: [...]

P: No es lo que me había dicho hace un momento, ¿verdad? A ver si allá atrás su compañero está de acuerdo. Usted está diciendo que la mueve hacia la izquierda 3 unidades porque aquí están 3. No sé si recuerdan lo que acabamos de explicar... Dijimos que le hace este a la función, y aquél que le hace...

Am: La mueve.

P: ¿Hacia dónde?

Am: Hacia la izquierda.

P: Entonces, ¿qué va a hacer acá?

Am: La va a subir.

P: ¿Verdad que la va a subir? Entonces está mal lo que decía su compañero. Vamos a poner algo un poquito más laborioso, a ver si entendimos: $y(x)=-(x-3)^3-3$. Los demás, ¿sí están de acuerdo?

Un alumno dice “a la izquierda” para señalar que se mueve a la izquierda del vértice, esto es, localiza un punto de referencia; la mayoría también afirma “hacia la izquierda”, pero repite lo que el docente expresó: “exacto, ahí está, la movió”. Sin embargo, cuando se da cuenta que no es la respuesta correcta, repite el cuestionamiento “¿qué le hace?” Un alumno responde: “La sube”, pero el docente sigue pidiendo la participación de los alumnos con gestos y llamados; la pregunta “¿qué le hace?” cumple la función de propiciar interacciones. El docente les recuerda un ejercicio anterior para llegar a una explicación que los convenza. Vuelve a preguntar hacia dónde la mueve, se perciben discusiones entre los alumnos -As: [...] y formula otra vez la pregunta. Un alumno dice: “La va a subir”, para aludir al movimiento del origen, esto es, a la variación de un punto de referencia. El profesor responde a esta afirmación con otra pregunta: “¿Verdad que lo va a subir? Entonces está mal lo que decía su compañero” (que se movía a la izquierda).

La repetición de la pregunta por parte del docente puede interpretarse como una estrategia para sondear las opiniones que hay en el grupo y para involucrar a más alumnos en las actividades, no necesariamente como una acción para buscar la respuesta correcta (D’Amore, 1999). Esto propicia la modificación de las respuestas que dicen los alumnos y abre la posibilidad de que se expresen distintas interpretaciones del tema y se contrapongan o complementen, contribuyendo a la construcción de significados. Todo ello ocurre con base en interacciones motivadas por el docente que no condujeron a explicaciones naturales de sus alumnos, sino a respuestas cortas en búsqueda de aceptación. Sin embargo, el docente usará este episodio para intentar validar una explicación ante sus alumnos, lo cual realiza cuando propone la función $y(x) = -(x-3)^3 - 3$.

Extracto 5.45

P: Pero ¿cómo se trabajaría? Tenemos la función básica. Este menos lo que hace es invertirla, ¿verdad?, y queda así. Borramos ésta y ahora este 3 la sube y queda así. Ahora vamos a intentar ésta... bueno, aquí no se nos olvide su dominio, que son los números reales y su imagen...

As: De 3.

Am: De 3 al ∞ .

P: Miren, de 3 al ∞ . ¿Y estos?

Am: Los reales.

P: Los reales, ¿verdad? Bueno, vamos a borrar aquí y seguimos con el menos ($f(x) = -(x-3^3) - 3$). Alguna compañera que quiera pasar... A ver, su compañera va a pasar, porque sus compañeros no se animan.

Af: ¿Ésa es la básica, verdad?

P: Sí es la básica. Vaya haciéndola paso por paso y verá que sí le va salir. Dibújela levemente para que la pueda borrar fácilmente. ¿Ése es el resultado?

As: ¡No!

Am: No, muévela hacia la derecha. No, así no (*todos los alumnos entran en la discusión*).

As: [...]

Am: El -3 la mueve a la derecha, o sea 1, 2, 3 y pasa por acá, mientras que el -3 la va a bajar.

As: ¡No, no!

Af: No, nada más bájala, muévela hacia la derecha y bájala.

Af: Es que tú nada más [...]

Af: Pásala por el vértice.

As: Ahí, ahí.

Af: A lo mejor te queda (risas).

As: (Risas).

P: Hey, Víctor, ¿dónde?, la curva pasa el punto... Ésa pasa por el punto.

As: Ahí, ahí. ¡No!

Am: A ver, espérate.

P: Ahí, ¿verdad?

Am: Maestro, ¿la gráfica va a tocar ahí?

P: Sí, es una buena pregunta. Realmente las gráficas que ustedes observan nos dan las formas, pero le falta cierta información. Eso lo podemos resolver; por ejemplo, su compañero pregunta: Este cruza en y , creo, y si la cruza ¿dónde lo hace? Bueno, aquí, cuánto vale, en este punto donde estoy marcando cuánto vale la x .

C (Gpo-1), pp. 14-15.

Como un primer paso para graficar la función, el docente explica qué le hace el signo menos (-) a la gráfica de la función de referencia: “*la invierte*”. Luego pide que pase al pizarrón una de sus alumnas, en virtud de que sus compañeros “no se animan”. Al intentar resolver el problema, el docente le pregunta a la alumna: “¿Ése es el resultado?” (alude a la graficación de la función) y la opinión de la mayoría es: “¡No!”

El extracto anterior parece tener dos partes. La primera termina con la respuesta negativa de los alumnos cuando el docente inquiriere si ese es el resultado al graficar la función. La segunda se produce durante la secuencia en la que varios alumnos dan distintas explicaciones sobre el papel del -3 que está dentro del paréntesis y del -3 que está fuera del paréntesis: “*Muévela hacia la derecha*”; “*el -3 la mueve hacia la derecha, o sea, 1, 2, 3 y pasa por acá y el -3 la va a bajar*”. Otros no están de acuerdo y dicen: “*No, nada más bájala, muévela hacia la derecha y bájala*”.

Aquí se describe una serie de versiones alternativas que llamamos *explicaciones* y, aunque no estén exentas de errores, son parte de un proceso de aproximación a la respuesta correcta. Explican, desde la perspectiva del alumno, el papel del parámetro, independientemente de las intervenciones del docente.

Todos intentan ayudar a la compañera enfrentada al pizarrón (una situación que se repite constantemente). Surgen risas y el docente retoma la conducción de la clase cuando pregunta a un alumno: “*Hey, Víctor, dónde pasa la curva por el punto. Ésa pasa por el punto*” y se refiere al punto que en la gráfica de la función básica es (0, 0). Surge una inquietud: *ahora, ¿dónde quedó? Un alumno pregunta: “Maestro, ¿la gráfica va a tocar ahí?”* El docente dice que una buena pregunta, ya que nada más conocen la forma de la gráfica; si quieren saber dónde cruza la gráfica al eje x y al eje y, falta cierta información. Posteriormente hacen el ejercicio para encontrar las intersecciones con los ejes.

En la segunda secuencia de turnos, el docente elige el ejercicio 48 de una lista de ejercicios, que consiste en graficar la función $y = \sqrt[3]{x}$, y luego hay que volver a hacerla, ahora afectada por parámetros (suma, resta, multiplicación, etc.). El docente pide a un alumno que resuelva el ejercicio y grafica la función $y = \sqrt[3]{x}$ para que sirva como base al compañero que va a pasar al pizarrón, y solicita al resto del grupo que haga el problema a medida que se trabaje.

Extracto 5.46

P: Entonces, si vale 48... ¿Quién lo quiere hacer? ¿Quién hace el 48?

Am: [...]

P: Alguien que pase.

Am: [...]

P: Más o menos esta es la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. A ver, vayan haciendo el problema en la medida en que lo resuelve su compañero.

Am: Aquí vemos que la vamos a recorrer a la izquierda...

P: A la izquierda, ¿sí? A ver, su compañero la está haciendo.

Am: A la derecha.

As: Hacia abajo.

P: Ya nada más la $y = \sqrt[3]{x} - 1$ podría ser a la izquierda o a la derecha, pero como tiene signo negativo es a la izquierda, ¿no?

As: ¡No! Hacia abajo

Af: Hacia abajo.

P: Bueno, pensemos en puntos a ver si nos pueden ayudar. Pensemos en puntos para esta x , para esta x sería esta y , ¿verdad?, y el valor de y está dado por éste. Ahora, ¿qué le vamos a hacer a la función nueva? A la y que teníamos hace rato para la x , ¿qué es lo que le vamos a hacer?

As: Restarle.

P: Restarle una unidad. Por ejemplo, en 1 ¿cuánto vale la original?

Am: 1.

P: Vale 1. Entonces, si a esta le voy a restar 1, dónde va a quedar este punto.

As: [...]

P: Aquí a cada punto le voy a restar una unidad, o sea, cada punto se va a desplazar una unidad ¿hacia dónde?

As: Hacia abajo.

La siguiente función para graficar es $y = \sqrt[3]{x} - 1$. Un alumno dice: “*Aquí vemos que la va a recorrer a la izquierda*”. El profesor duda de la respuesta y sugiere ver lo que hace el alumno que está en el pizarrón. Otro alumno afirma “*A la derecha*” y, después de haber escuchado algunas respuestas, la opinión de la mayoría es “*Hacia abajo*”. El profesor no está convencido, ya que él piensa que la función con la que se está trabajando es $y = \sqrt[3]{x} - 1$ en vez de $y = \sqrt[3]{x} - 1$. Señala: “*Podría ser a la izquierda o a la derecha, pero como tiene signo negativo es a la izquierda, ¿no?*” Nuevamente la opinión de la mayoría rechaza la explicación del docente y da un rotundo “*¡No, hacia abajo!*” Una alumna también dice “*Hacia abajo*” para reafirmar la respuesta del grupo.

El lugar que tiene el docente en el aula como experto y conocedor de los contenidos escolares no lo excluye de que tenga que argumentar sus puntos de vista e intente convencer a los alumnos. Una explicación, en este caso, no parece ser siempre aceptada por el hecho de que lo plantee el profesor. Estas opiniones han propiciado que el docente *modifique* su explicación y su situación de enseñanza, ya que no le funciona adecuadamente; dicho cambio es producto de la gran cantidad de interacciones entre el profesor y sus alumnos. Esto es un fenómeno localizado en la literatura de la educación básica (Brousseau, 1986) y que hemos encontrado de nueva cuenta en la educación superior.

En el extracto anterior, los alumnos discuten y dan sus puntos de vista porque el profesor está confundido, todavía no se da cuenta del error. Sugiere que se piense en algunos puntos para ver si eso puede ayudar. Nuevamente recurre a la función original $y = \sqrt[3]{x}$ como una estrategia para iniciar nuevamente la explicación, a través de lo que él llama *la original* y dice: “*¿Qué le vamos a hacer a la nueva?*” El grupo contesta: “*Restarle*”. De inmediato pregunta cuánto vale la original en 1 y un alumno asegura que 1. Entonces, el profesor afirma: “*Vale 1. Entonces, si a esta [la nueva función $y = \sqrt[3]{x} - 1$] le voy a restar 1, dónde va a quedar ese punto [el origen]*” y trata de llegar a un acuerdo: “*Aquí a cada punto le voy a restar una unidad, o sea, cada punto se va a desplazar una unidad ¿hacia dónde?*” La mayoría responde: “*¡Hacia abajo!*”

Enseguida veremos la función raíz cúbica $y = \sqrt[3]{x} - 1$, donde ahora el -1 está dentro de la raíz, a diferencia del ejercicio anterior, que está afuera. Tal diferencia genera un malentendido. Aquí las explicaciones del profesor van al mismo ritmo que las de los alumnos y el malentendido se supera en la medida en que las explicaciones son compartidas.

P: Ahora, la siguiente va a ser $y = \sqrt[3]{x} - 1$, no es $f(x)$.

Af: ¡Ah!

P: Ahora sí, vamos a recorrer ¿hacia dónde?

Af: A la derecha.

P: ¿Cuántas unidades?

Af: 1.

P: Entonces, quiere decir que ahora este punto lo vamos a encontrar hacia la derecha [...] vayan resolviendo. Ahora es muy fácil, pero a la hora del examen [...], aquí me dicen ‘es muy fácil, ponme más’. Ésa es la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$, o sea, ¿qué sucedió? Se desplazó hacia la...

Am: Hacia la derecha.

Ante la equivocación del ejemplo anterior, el docente dice “*Ahora sí, vamos a recorrer ¿hacia dónde?*” y de inmediato le responde una alumna: “*A la derecha*”. Como ya se discutió anteriormente, en este caso la graficación ha sido rápida. El 1 mueve la gráfica a la derecha, esto es, se desplaza el origen, que es el punto de referencia (variación de un punto de referencia). Volvemos a encontrar aquí que la pregunta del docente “*¿Hacia dónde?*” tiene la función de propiciar explicaciones.

Cuando aborda la función que sigue, $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}$, el docente inicia su explicación diciendo que vale la mitad del valor inicial, que sería la mitad de la básica y va a quedar más pegada al eje de las X.

P: Una unidad, está bien. La que le sigue, $y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}$, ahora vale la mitad del valor inicial y va a quedar más pegada al origen de las X.

Am: Vamos a graficar.

P: Aunque, ¿qué es lo que vamos a hacer con cada y que es lo que vamos a hacer con cada ordenada?

Af: Va a bajar en y .

P: No va a bajar. O sea, ¿qué es lo que va a hacer?

Am: Se va a inclinar.

Am: Se va a reducir.

P: Se va a reducir, ¿a cuánto? A la mitad. Entonces, voy a reducir. Para imitar cada valor de y este se va a pegar más que, ¿verdad? Ahí graficala. Ahora sí, cada uno de estos puntos respecto a esta se deben ver [...] *Sí estamos de acuerdo.*

El profesor inquiere: “¿Qué es lo que vamos a hacer con cada ordenada?” Una alumna contesta: “Va a bajar en y”. El profesor afirma que no va a bajar y de nueva cuenta pregunta “¿Qué es lo que va a hacer?” Dos alumnos señalan: “Se va a inclinar” y “Se va a reducir”. El docente toma la explicación de que se va a reducir y precisa: “Se va a reducir ¿a cuánto?” Antes ya había explicado que la gráfica va a quedar más pegada al eje X y vale la mitad del valor inicial; ése es el efecto que hace el $\frac{1}{2}$ a la gráfica. En la interacción los profesores construyen sus explicaciones y propiciando una complementariedad con las diversas versiones.

Como ya se presentaron algunos casos para la función básica $y = \sqrt[3]{x}$, los siguientes se realizan con mayor rapidez. Por ejemplo, la siguiente es $y = \sqrt[3]{x} + 1$. Otra vez el docente inicia con una pregunta: “¿Cómo va a estar la gráfica?” Los alumnos empiezan a dar sus respuestas. Uno explica que va a estar un poco más a la izquierda y el docente vuelve a inquirir “¿Qué va a suceder con la gráfica?” La respuesta es “Se va a desplazar hacia la izquierda”. “¿Cuántas unidades?”, pregunta el docente, y la opinión de la mayoría es “1”.

P: ¿Cómo va a estar la gráfica $y = \sqrt[3]{x} + 1$?

Am: Va a estar un poco más a la izquierda.

As: [...]

P: ¿Qué va a suceder con la gráfica en este caso?

Am: En el otro lado...

P: Se va a desplazar ¿cuántas unidades?

As: 1.

P: Una unidad hacia la izquierda. Esa es la gráfica de $y = \sqrt[3]{x} + 1$, así me quedó. Qué hago primero en ese inciso que va a ser primero, $y = -\sqrt[3]{x}$.

Am: A este [...]

Am: Podría ser una reflexión.

P: Vamos a hacer una reflexión, o sea, no quiere decir que se vaya invertir aquí este así...

Am: Los valores...

P: $y = -\sqrt[3]{x}$. Bueno, eso ya sería como un punto para la resolución del problema, eso es lo que queremos, ¿no?

As: Sí.

P: De $y = \sqrt[3]{x} - 2$ ¿no?, va a estar a la mitad. ¿Para dónde va?

Am: Hacia la derecha.

P: ¿Cuántas unidades?

Am: 2.

P: Dos, van a ser a la derecha...

Finalmente, están las funciones $y = -\sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt[3]{x} - 2$. En la primera, el docente pregunta “*Qué hago primero*” y un alumno contesta: “*Podría ser una reflexión*”. Tal explicación es usada por el docente, ya que dice se va hacer una reflexión, esto quiere decir que los valores se van a invertir. El docente interviene para reforzar la explicación del alumno y la formula como un principio general: “*Vamos a hacer una reflexión*”. En la última función, el docente pregunta “*¿Para dónde va?*” y otro alumno dice “*Hacia la derecha*”. Se concluye que se mueve 2 unidades hacia la derecha.

En este caso, la repetición de una pregunta también puede interpretarse como una táctica para sondear las opiniones de los alumnos, abre la posibilidad de que surjan distintas interpretaciones y favorece la construcción de explicaciones durante la interacción.

En el tercer extracto, el docente pide la colaboración de un estudiante para que pase al pizarrón a bosquejar las funciones $y=x^2-4$, $y=x^2+4$. El docente da pie a la interacción discursiva cuando dice “*¿Cuál sería la gráfica de la función $y=x^2-4$?*”, y el alumno que está al frente contesta: “*Sería de (0,-4)*”, aludiendo al vértice de la función como punto de referencia, donde la parábola bajó 4 unidades. Esto se puede notar en los registros de la clase, ya que en las transcripciones no aparecen gráficas ni bosquejos. Nuevamente identificamos que la pregunta del profesor (“*¿Cuál sería la gráfica de la función $y=x^2-4$?*”) funge como generadora de esas explicaciones.

Extracto 5.50

P: Bueno, a ver. ¿Cuál sería entonces la gráfica de $y=(x^2-4)$?

Am: Sería de (0,-4).

P: Esto sería, ¿desde dónde?

Am: Desde +4 (...) -4.

P: A ver, fíjense bien. Mejor escriban y así nos ahorramos mil palabras. ¿Cómo es la primera? Pónganle ahí dónde empieza y dónde termina.

Am: ¿Por qué?

Am: Es negativo.

Am: Sí, es desde (-4).

Am: Si la pasas para acá es positivo.

Am: No.

Am: Por eso, ponle [...] es positivo.

Am: Ándale.

Am: Sí sabes.

As: [...]

Am: Prácticamente es el mismo signo de la función, le cambia el signo.

Am: Es el mismo signo, porque al cambiarlo [...] queda más, como es X [...]

P: (0,4).

Am: Entonces esta es [...]

P: Y abajo sería (0,-4); (0,-4)... un punto [...], el dominio [...]

A (Gpo-1), p. 26.

En el extracto se puede apreciar que están intentando bosquejar las dos funciones a la vez. El profesor dice a los alumnos que escriban cuál es la primera función que se está bosquejando, dónde empieza y dónde termina. Después del comentario, se presenta una secuencia donde los alumnos discuten en qué le afecta a la parábola ese -4 y 4, esto es, sobre el vértice de la gráfica. En las anteriores intervenciones de los alumnos se dan distintas versiones como respuesta a la pregunta.

En esta sección se observa que los profesores con frecuencia promueven la producción de explicaciones cuando demandan a los alumnos que justifiquen sus puntos de vista; asimismo, aportan explicaciones para apoyar o rechazar una versión. Los profesores crean un escenario que facilita la participación de los alumnos a través de una pregunta, una explicación o un comentario, lo cual tiene un efecto en la dinámica de la interacción discursiva dentro del aula ya que, en algunas situaciones, los docentes modifican su discurso cuando hay mucha interacción con los alumnos. Hacen ligeras modificaciones o formulaciones a las explicaciones que se han construido en la interacción y dan apertura a una complementariedad entre las diversas versiones.

Conclusiones de capítulo

En este estudio, al igual que en (Mercado, 2001), la diversidad de situaciones que se suscitan durante la enseñanza implica que constantemente se presenten elementos de improvisación como parte de la vida cotidiana y como posibilidad de aprendizaje ante ambientes nuevos. A este respecto también conviene recordar lo que señala Olson (1992): “La gente no planea sus argumentos antes de construirlos”.

La improvisación es una parte constitutiva de la vida cotidiana y del encuentro entre personas. En la escuela, como dice Erickson (1982), los maestros y los estudiantes están comprometidos con la praxis, improvisan variaciones situacionales dentro y en torno al material temático socioculturalmente prescrito y, ocasionalmente, descubren nuevas posibilidades tanto para aprender como para la vida social.

Como relación de trabajo, la enseñanza es construida entre maestro y alumnos. Los ajustes y negociaciones entre ellos implican una construcción colectiva (Mercado, 2001); incluso en diversos aspectos de la vida en el aula, y muchas veces en las tareas académicas, se empeñan en llegar a consensos respecto a los trabajos que emprenden juntos (Erickson, 1982; Candela, 1999).

Es en la relación con los alumnos donde los saberes docentes no sólo son validados por los profesores, sino también ahí se constituyen privilegiadamente. Para la construcción del saber matemático avanzado, dicho privilegio no sólo reposa en el convencimiento de los alumnos, sino también en la validez estructural del saber.

Este hecho debe modificarse de manera exclusiva entre la explicación del maestro y la explicación del alumno para dar lugar a una referencia al saber específico. En el caso anterior se trataba de la generalización de reglas para el movimiento de las gráficas al complicar las expresiones analíticas correspondientes; por tanto, no era la gráfica el referente de las explicaciones, sino la regla extraída de casos más simples. Esto produjo finalmente una explicación compartida a través de verbos con significado situacional de la noción de variación (*subir, bajar o desplazar*).

En esta perspectiva, si bien la enseñanza es dirigida por el maestro, la influencia de los alumnos en las explicaciones del docente resulta decisiva para muchas acciones que emprende para enseñar. Pasamos así de una visión que ve a los alumnos como aquellos que reciben la enseñanza del profesor, a la búsqueda de los aspectos que determinan las acciones docentes, considerando el efecto que en ellas pueden tener los alumnos. Es así como en este estudio se pudo documentar las formas en que se produce el envejecimiento con base en las interacciones alumnos-maestro-saber a través de las explicaciones en clase.

Conclusiones generales

La labor del profesor de matemáticas es fundamental para desarrollar entre sus estudiantes el interés por el conocimiento, para favorecer el desarrollo de su propio pensamiento matemático y para coadyuvar al crecimiento del saber. Su trabajo normalmente se lleva a cabo de muchas maneras: al preparar sus clases, al decidir sobre los mecanismos de evaluación de los aprendizajes, al dictar su cátedra y al seguir, de alguna manera, la evolución de cada uno de sus alumnos.

Por ello, las clases de matemáticas son un espacio densamente rico en cuanto a rituales de iniciación académica: unas veces se dan a través del habla, otras mediante la lengua escrita. La diversidad de las situaciones que se generan durante la enseñanza implica que se presenten constantemente factores de improvisación como parte cotidiana y como posibilidades de aprendizaje ante ambientes nuevos. Quizás ahí está la fuente de inspiración de esta investigación.

Entre las cuestiones destacadas de los análisis presentados en este libro se encuentran el carácter sociocultural de la enseñanza y la construcción colectiva y local que de ella hacen el maestro y los alumnos. Puede creerse que las clases de matemáticas son rigurosas y precisas, y que cuando se dictan en la educación superior no dan lugar a interacciones de tipo discursivo. Este trabajo muestra la

falsedad de tal creencia debido a que las clases se caracterizan por el alto nivel de interacción entre los estudiantes, el maestro y el saber. Son una construcción conjunta entre el maestro y los alumnos.

De manera específica, la investigación centró su atención en el papel de la explicación en el salón de clases y discutió la importancia que desempeña en los entendimientos matemáticos de los estudiantes. Si bien la cuestión de la participación de los alumnos en el aula escolar de la educación básica, dentro de la clase de ciencias, ha sido ya tratada, al igual que la asimetría entre el papel de la explicación didáctica y la explicación científica en clase de matemáticas -que conduce a un desequilibrio entre el estatus no científico de las explicaciones didácticas- y la cuestión de la explicación en la enseñanza de las matemáticas de los ciclos correspondientes a la educación obligatoria, este trabajo, como se pudo apreciar en cada uno de sus capítulos, puso énfasis en dos planos diferenciados: un plano aludió al tratamiento del objeto matemático de naturaleza no explícita, esto es, un objeto cuya introducción en el aula sigue caminos distintos a los que se dan en la presentación de definiciones y axiomas, concretamente, a la noción de variación. El otro fue relativo al contexto institucional, ya que este estudio tuvo lugar en una institución para la formación de ingenieros en las especialidades de mecánica, bioquímica, computación y electrónica; los profesores, a su vez, tenían diferentes orígenes profesionales.

Este estudio se distingue, porque centra su atención en la noción de explicación como categoría teórica de análisis de una noción paramatemática. En este sentido, se trabajó sobre el papel de la explicación en la clase de matemáticas de los futuros ingenieros cuando emplean, comparten, negocian o construyen la noción de variación. Las contribuciones más significativas de este estudio se ubican en tres niveles: el metodológico, el teórico y el de las prácticas de referencia.

Dentro del ámbito metodológico, la contribución se sitúa en haber extendido el uso de métodos que, si bien son conocidos y suficientemente empleados en la educación básica, no lo son en las clases de matemáticas a nivel universitario. Esto se confirma al revisar las actas de los congresos más importantes en nuestra disciplina, la Relme y el PME. Quizá ello se debe a la resistencia a la observación de lo cotidiano en el aula universitaria de ciencias e ingeniería y a la concepción, ampliamente difundida, de que los problemas de aprendizaje en esos niveles son exclusiva responsabilidad de quien aprende, una idea que no debe compartirse.

Habitualmente, los análisis de matemática educativa en el contexto superior se llevan a cabo en el momento de intervenir en el sistema de enseñanza con el diseño de una situación de aprendizaje o con un vasto dispositivo de ingeniería didáctica; en ambos casos, la intervención sucede desde el diseño de la actividad y su puesta en funcionamiento es controlada desde fuera del aula. El investigador, a

quien suele considerarse en este modelo como un verdadero *ingeniero didacta*, participa en la concepción, diseño, implantación y análisis de la puesta en escena, determina las variables de control y, a través de ellas, regula su mediación en el sistema de enseñanza.

Como el enfoque etnográfico, a diferencia del anterior, disfruta de la contemplación y no pretende participar en el momento de la observación ni tiene como objetivo la intervención, el primer reto fue la búsqueda de una articulación adecuada entre estas aproximaciones. Hubo que coordinar, en el campo teórico, el estudio del envejecimiento y el análisis de las explicaciones en el aula cuando el docente introduce la noción de variación como parte de sus explicaciones. Se abandonó la aspiración de diseñar una situación didáctica con fines de intervención razón, por por ello no fue seguida la metodología típica de las situaciones didácticas, acción, formulación, validación e institucionalización, sino que el estudio del fenómeno de envejecimiento centrado en la etapa de institucionalización.

La razón principal que motivó la búsqueda de esta articulación radicó en hallazgos propios (Cantoral y Reséndiz, 2003), acerca del persistente fracaso escolar con respecto al aprendizaje de los temas de cálculo diferencial e integral. Era sabido que los estudiantes lograban un nivel aceptable en la operatividad algorítmica cuando derivaban, integraban, calculaban límites o encontraban máximos o mínimos, pero eran incapaces de reconocer procesos de cambio y de variación que precisaban de una derivada o de una integral en situaciones escolares un poco más elaboradas. Ello condujo, naturalmente, al estudio sistemático de las condiciones en las que se organiza la enseñanza de dichos temas y no circunscribirlos sólo al examen de su aprendizaje. Esta investigación no busca verificar si el alumno alcanzó un aprendizaje o si construyó un conocimiento estudio que sería más bien de corte cognitivo, sino que estudia el fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza ligado a las prácticas de enseñanza, tema central de este libro. Desde esta perspectiva fue encarado el hecho de que habría que analizar la variación, aunque no fuera un objeto explícito de la enseñanza, es decir, un tema curricular, como los conceptos de límite o función.

La aportación, dentro del terreno práctico, radica en haber aportado suficiente información empírica sobre la forma en que la noción de variación vive y evoluciona en el aula de matemáticas a nivel universitario. Este cambio de enfoque permitió abandonar el clásico acercamiento de la búsqueda de los conceptos centrales del cálculo, para ubicarnos en el examen de la noción de variación a lo largo de distintas prácticas educativas.

La relación maestro-alumno-saber es una relación didáctica central en nuestro enfoque, ya que en el pequeño espacio donde el docente y sus alumnos

construyen el saber se producen las condiciones del aprendizaje. Los docentes no sólo tienen que ganarse el consentimiento de los alumnos y promover su participación; ellos también incentivan la participación de sus alumnos cuando les solicitan que justifiquen sus respuestas. Los alumnos, como sujetos activos, pueden rebasar las expectativas del docente y alterar la dinámica de la interacción; al mismo tiempo, pueden contribuir a nuevas construcciones del conocimiento.

En este análisis se logró identificar una gran diversidad de perspectivas que emplean los profesores cuando explican la noción de variación. Por ejemplo, con frecuencia manejaron recursos como el uso de parámetros para articular su explicación a lo cotidiano (rota, traslada, sube, baja, agarra, recorre, jala) o a la asignación de significados múltiples de orden visual, gestual y simbólico para las funciones (traslación, inclinación, rotación, desfaseamiento, contracción, a menor que 1, a mayor que 1). Además, atribuyeron expresiones de movimiento a las gráficas y a los puntos singulares de referencia como vértice, origen, asíntota o cruce y recurrieron a las tablas como medios de aproximación a un límite particular: df/dx .

Del mismo modo, en sus explicaciones construyeron una especie de lenguaje con símbolos propios. Emplearon con frecuencia la idea de función básica o expresión básica para denotar a la familia de curvas siguientes: x , x^2 , x^3 y $\text{sen } x$. Las llamaban así en virtud del uso que harían de ellas, esto es, con ellas construían las demás funciones a través de reglas sintácticas simples $x+a$, $x-a$, etc. Este manejo de un lenguaje particular para las funciones y el uso de la variación a veces de la x , a veces del parámetro a , a veces del punto $P(x, y)$, a veces del incremento o del cociente de ellos, habla de cómo el profesor elabora conjuntamente con sus alumnos un discurso basado en explicaciones compartidas que no dejan de lado al saber, pero yuxtaponen un lenguaje cotidiano que permite “agarrar a las funciones”.

Por tal motivo, el contexto nos llevó a localizar las formas en que *vivía* la noción de variación en cada clase. Descubrimos que había cinco tipos diferentes de explicación donde se apreciaba la noción de variación, según se usara el modelo numérico, el de representación geométrica o gráfica, el de tratamiento algebraico, el de comparación y el de covariación, o alguno sustentado en el lenguaje natural. El fenómeno de envejecimiento que en nuestro caso está ligado a la noción de variación, observó que las prácticas del profesor tienden a apoyarse fuertemente en la variación numérica usando como medio para explicar la construcción y análisis de una tabla de valores.

La teoría de las situaciones didácticas sostiene que a través de la explicación, y sólo mediante ella, que tiene lugar la serie de interacciones que hacen funcional la comunicación y el intercambio de ideas generadas dentro de la situación de aprendizaje. De ahí que para explicar el fenómeno de envejecimiento no haya

que estudiar las situaciones didácticas de intervención, sino las explicaciones que cotidianamente se usan en el aula.

Es notorio que las situaciones de enseñanza analizadas se dan sobre la base de las relaciones maestro-alumno-saber, lo cual es un supuesto básico de la teoría, e interesan a nuestro estudio en tanto que son el fundamento de las explicaciones portadoras de conocimiento. Como ya hemos dicho, el profesor explica al alumno y éste a su vez explica al maestro con base en el *milieu*, al hacer ambos un uso de cada uno de los elementos a su alcance en un momento dado. Tal hecho constituye una característica notable del fenómeno de envejecimiento, pues se acude a los recursos disponibles tanto del maestro como de los alumnos al cambiar su explicación, y es ahí donde inevitablemente envejecen a medida que son empleados

Las explicaciones sufren modificaciones a partir de la interacción, que se propicia por una búsqueda de complementariedad entre las versiones de los alumnos y la del maestro. Las intervenciones del profesor en las que solicita explicaciones y trata de orientarlas regulan el curso de la clase; así, la situación de enseñanza cambia a través del empleo de explicaciones situadas. Durante la enseñanza de la noción de variación -centro de estudio en nuestra investigación-, los maestros se apoyaron fuertemente en la de variación numérica y el modelo al que más recurrieron fue la tabla de valores. Insistimos en que tales recursos no forman parte de lo que típicamente se considera como el contenido matemático de una clase, sino que con ellos se amalgama la explicación en el aula. La función no es la tabla, la fórmula ni la gráfica, sino una relación de correspondencia específica y su representación no es el concepto, pero a través de ellas el profesor lo hace aparecer en clase.

Los profesores interactúan constantemente con los alumnos mediante el uso del saber explicado, o bien de la explicación didáctica en el sentido de Sierpinska. Esto ocurre con mayor intensidad cuando se aborda la noción de variación, que no es objeto explícito de la enseñanza en la medida en que no es introducida en el aula mediante una definición ni es manejada en los libros de forma explícita, ya que no se trata de una caracterización categorial. Su aparición se da con el lenguaje cotidiano, que brinda el contexto para explicar cómo varían los fenómenos relativos a la física o la ingeniería, y ello se traslada al juego de los discursos formales y no formales.

Recordemos que la teoría de situaciones de Brousseau (1986), se basa en una aproximación constructivista que actúa bajo el principio de que una noción se construye en el ambiente de situaciones de enseñanza. En el aula se crea un discurso que elaboran tanto maestro como alumnos. Si bien, en un principio, consideramos sólo las explicaciones del docente tuvimos que cambiar nuestra óptica, pues observamos que los alumnos desempeñaban un papel central en el discurso de

la clase; el docente no es la única, ni siquiera la principal fuente de autoridad matemática. Los alumnos comparten sus respuestas con el docente y sus compañeros.

En algunos casos, los alumnos se apropian de la función de pedir o demandar explicaciones antes de aceptar una respuesta, algo que en principio pareciera relacionarse con el papel del docente. Incluso, en algunas circunstancias, el alumno hace que el profesor modifique la situación de enseñanza. Los análisis realizados muestran una importante presencia de las intervenciones de los alumnos y su influencia en la dinámica del discurso en el aula. Como ejemplo de su competencia, se ha encontrado que hacen uso de algunos recursos, como la capacidad de explicar y el rechazo a la explicación del docente.

Ahora bien, la riqueza de la construcción de significados en la interacción, más que un proceso que parte de la diversidad de opiniones, termina como un proceso donde se negocian y articulan significados, pero también se abren alternativas explicativas, se plantean debates y explicaciones que casi siempre llegan a una conclusión y, de ahí, al proceso de institucionalización.

Todos los momentos donde intervienen los alumnos por decisión propia tienen un profundo significado para ellos, ya que así ejercitan su autonomía, satisfacen sus demandas de conocimiento, afianzan la credibilidad que el profesor les inspira y, sobre todo, participan. Esto significa la apertura democrática del profesor, quien les confiere la posibilidad de asumir roles diversificados que van más allá de su papel como espectadores de su propio aprendizaje.

En cuanto al papel de la interacción, hemos constatado que produce transformaciones prácticas en el discurso didáctico y posibilita la apropiación del conocimiento. Por tanto, las lecciones no son guiones rígidos que se cumplen por encima de cualquier circunstancia.

La negociación de significados incluyó tanto los contenidos académicos que se construyen en cada intervención como las acciones por medio de las cuales se realiza: *explicar, describir, convencer, imponer, compartir, validar, cuestionar, ejemplificar* y muchas más. Así, los participantes tienen que negociar el significado con el fin de llegar a un significado compartido, que sea comprendido por todos los miembros de la cultura de la clase.

Por medio de tal proceso los participantes constituyen significados “tomados como compartidos”, aunque no necesariamente compartan el conocimiento (Godino y Linares, 2000). Los significados se elaboran a través de negociaciones cuyo sustento son las explicaciones por las que el grupo llega a estar de acuerdo sobre ciertas convenciones. Su resultado final tiene propiedades emergentes, porque las contribuciones individuales pueden añadir algo sobre lo que nadie había pensado y anticipado.

No intentamos generalizar, pero nuestra investigación puede reflejar las clases de cálculo en las escuelas de ingeniería bajo condiciones reales o normales, donde los conocimientos aparecen como un producto de la construcción social de los participantes en una tarea compartida, con desempeños particulares, igualmente importantes en cuanto a los recursos discursivos puestos en juego.

No se pretende mejorar la microcultura de la clase de la misma manera que podemos cambiar el currículo matemático o la macrocultura de la clase caracterizada por principios generales y estrategias de enseñanza. Como afirma Voigt (1995):

Deberíamos conceptualizar el cambio de una microcultura como una evolución, más bien como una reorganización. Pero con el fin de influir y dirigir esa evolución es útil comprender las regularidades y la dinámica de los procesos dentro de la vida de la clase.

La intención de este trabajo fue contribuir, en alguna medida, al conocimiento de las situaciones y las actitudes que propician una participación más libre, creativa, autónoma y constructiva de los profesores y alumnos, a fin de que obtengan un peso mayor en la experiencia escolar. Estudios de tal índole han contribuido, sin duda, a enriquecer nuestro conocimiento de lo que ocurre en el aula.

La investigación no pretende decir cómo se debe enseñar la variación, más bien puede resultar ilustrativo para los docentes. Son ellos los que organizan discursivamente sus conocimientos y buscan explicaciones que los hagan coherentes y convincentes. Al explicar algo en matemáticas nuestro discurso llega a ser más extramatemático que propiamente matemático.

Bibliografía

- Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo*. Tesis Doctoral, Cinvestav, IPN.
- Albert, J. A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica*. Tesis Doctoral. Cinvestav, México.
- Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). “Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual”, *Revista de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), pp. 7-29.
- Artigue, M. (1991). *Analysis*. In D. Tall (De.). *Advanced Mathematical Thinking* (Capítulo 11, pp.167-198). Mathematics Education Library. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ball, D. L. (1991). What’s all this talk about discourse? *Arithmetic Teacher*, 39(3): pp. 44-48.
- Bartolini Bussi, M.G. (1998). “Verbal interaction in the mathematics classroom: A Vygotskian análisis”. En H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Languaje and communication in the mathematics classroom* (pp. 65-84). Reston, VA: NCTM.
- Bergamini, D. (1983). *Matemáticas*. México: Time Life International de México.
- Brousseau, G. (1986a). “Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques”. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2): pp. 33-115.
- Brousseau, G. (1990). “Le contrat didactique: le milieu”. *Recherches en didactique des mathématiques*. 9(3): pp. 309-336.
- Brousseau, G. (1998). “Los diferentes roles del maestro”. En Parra, P. & Saiz, I. (Eds.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, (pp. 65-94) México: Paidós.
- Bruner, J. (1988). *Acción, pensamiento y lenguaje*, comp. J. L. Linaza, Madrid: Alianza.
- Candela, A. (1990). Investigación etnográfica en el aula: el razonamiento de los alumnos en una clase de ciencias naturales en la escuela primaria. *Investigación en la escuela*, 13: 13-23.
- Candela, A. (1991). *La necesidad de entender, explicar y argumentar: los alumnos de primaria en la actividad experimental*. Tesis de Maestría, Cinvestav, IPN.
- Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso*. México: Paidós.
- Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional*. Documento interno. Cinvestav, IPN.
- Cantoral, R. (2013a). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. DF, México: Secretaría de Educación Pública.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2014). “Socioepistemología, matemática y realidad”. *Revista Latinoamericana de Matemática Etnomatemática*, 7(3), pp. 91-116.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). “Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis”. *Épsilon* 42, 353-369.

- Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). “El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), pp.133-154.
- Cazden, C. B. (1990). “Teaching as a linguistic process in a cultural setting”. En N.L. Gage (Ed.) *NIE conference on studies in teaching* (pp. 78-86). USA: Mathematical Association of America.
- (1991). *El discurso en el aula*. Temas de educación, Ministerio de Educación y Ciencia. México: Paidós.
- Clagett, M. (1968). *Nicole Oresme and the medieval geometry of qualities and motions*. USA: Univ. Wisconsin Press.
- Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique*. La Pensée Sauvage éditions.
- D’Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- Douady, R. (1995). “La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento”. En P. Gómez (Ed.), *La ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.
- Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* Grupo Editorial Iberoamérica (Versión original en francés en: “Petit X”, 31, 1992, pp. 37-61).
- Edwards, D. & Mercer, N. (1987). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula*. Paidós.
- Eisenhart, M. A. (1988). “The ethnographic research tradition and mathematics education research”. *Journal for Research in Mathematics Education*, pp. 19, 99-114.
- Erickson, F. (1986). “Classroom discourse as improvisation: Relationships between Academia Structure and Social Participation Structure in Lessons”. En L. C. Wilkinson (Ed.) *Communicating in the Classroom* (153-181).e
- Erickson, F. (1986). “Métodos cualitativos en investigación sobre la enseñanza”. En Wittrock, (Ed.) *La investigación de la enseñanza, II*. (pp.195-301). Barcelona: Paidós. (Publicación original: 1986. “Handbook of Research on Teaching. Third Edition”. New York: Macmillan Publishig).
- Farfán, R. (1992). *¿Matemática educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe*. Publicaciones Centroamericanas 6(2): pp. 236-253.
- Flores, A. (1992). *Docentes de matemáticas reflexivos: cuatro maestros extraordinarios*. Publicaciones Centroamericanas 8(1): pp. 247-252.
- Flores, A. et. al., (1995). *Orquestar, promover y mejorar el discurso matemático en el quinto grado: Estudio de un caso*. Cuadernos de Investigación, PNFAPM.
- Forero, A. (2008). “Interacción y discurso en la clase de matemáticas”, *Universitas Psychologica*, 7(3), pp. 787-805.

- Godino y Linares, (2000). "El interaccionismo simbólico en educación matemática", *Educación Matemática*, 12(1), pp. 70-92.
- Hammersley, M. & Atkinson, P. (1994). *Etnografía. Métodos de investigación*. Barcelona, España: Paidós.
- Huertas, J. & Montero, I. (2001). *La interacción en el aula. Aprender con los demás*. Aique, Buenos Aires, Argentina.
- Josse, E. & Robert, A. (1993). "Introduction de l'homothétie en seconde, analyse de deux discours de professeurs". *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 14(2): pp. 119-154.
- Jungwirth, H. (1991). "Interaction and gender-findings of a microethnographical approach to classroom discourse". *Educational Studies in Mathematics*, pp. 22, 263-284.
- Mercado, R. (2001). *Los saberes docentes como construcción social*. Tesis Doctoral, Cinvestav, IPN.
- Mopondi, B. (1995). "Les explications en classe de mathématiques". *Recherches en didactique des mathématiques*, 15(3): pp. 7-52.
- Moreno, L. (1991). "En torno a las nociones de número y variación". *Mathesis*, 7(2), pp. 189-204.
- Moyer, M., (2000). "Estrategias de negociación: Análisis de la partícula *no* en conversaciones bilingües". *Revista Iberoamericana de Discurso y Sociedad* 2(1).
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Piaget, J. (1973). *La representación del mundo en el niño*. Morata.
- Pimm, D. (1991). *El lenguaje matemático en el aula*. Morata.
- René de Cotret, S. (1988). "Une étude sur les représentation graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendant". *Petite X*, 17, 5-27.
- Rebollo, M. (2001). *Discurso y educación*. Sevilla: Mergablum.
- Reséndiz, E. y Cantoral, R. (2003). "El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 6(2): 133-154.
- Reséndiz, E. (2006). "La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar"; *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), pp. 435-458.
- Reséndiz, E. (2010). "El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-1), pp. 99-112.
- Rockwell, E. & Mercado, R. (1987). *La escuela, lugar del trabajo docente. Descripción y debates*. Cuadernos de educación, México: Cinvestav, IPN.

- Rockwell, E. (1987). *Etnografía y teoría en la investigación educativa. Enfoques*. Bogotá: Colombia: Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.
- Rockwell, E. et al. (1996). *Encuentro del Área de Ciencias Sociales y Humanidades*. Documento DIE, Cinvestav, IPN.
- Seeger, F. (2001). “Discourse and Beyond: on the Ethnography of Classroom Discourse”, en H. Steinberg, M. Bartolini y A. Sierpiska (eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 85-101.
- Sierpiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education. Series: 2, The Falmer Press.
- Silver, E. y Smith, M. (1996). “Building Discourse Communities in Mathematics Classrooms: A Worthwhile but Challenging Journey”, recuperado el 20 de septiembre de <https://resources.oncourse.iu.edu/access/content/user/jeifler/Portfolio/Building%20Discourse.pdf>.
- Sfard, A. (2002). “Learning mathematics as developing a discourse”. En R. Speiser, C. Maher, (Eds.) *Proceedings of 21st conference of PME-NA*, pp. 23-44. Columbus, Ohio: Clearing House for Science, mathematics, and environmental education.
- Seeger, F. (2001). “Discourse and Beyond: on the Ethnography of Classroom Discourse”. En H. Steinberg, M. Bartolini, A. Sierpiska (Eds.) *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, pp. 85-101. National Council of Teachers of Mathematics.
- Solís, M. (1999). *Estudio de la noción de variación en contextos físicos: el fenómeno de la apropiación del calor*. Premio Simón Bolívar 1997. Comité Latinoamericano de matemática Educativa.
- Stubbs, M. (1983). *Discourse Analysis: The sociolinguistic analysis of natural Language*. Chicago University Press.
- Tusón, A. & Unamuno, V. (1999). “¿De qué estamos hablando? El malentendido en el discurso escolar”. *Revista Iberoamericana de Discurso y Sociedad* 1(1).
- Vergnaud, G. (1981). “Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques”, *Proceeding PME 5*, pp. 7-17.
- Voigt, J. (1995). “Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norm”, recuperado el 11 de agosto de 2015 en: <https://books.google.com.mx/book?hl=es&lr=&id=y3y27cSuEQC&oi=fnd&&pg=PA163&dq=Voigt>
- Vygotsky, L. (1984). “Aprendizaje y desarrollo intelectual en edad escolar”. *Revista de Infancia y Aprendizaje* Núm. 27/28.
- Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind*. Londres: Harvester Wheatsheaf.
- Witrock, M. C. (1990). *La investigación de la enseñanza, III. Procesos y alumnos*. Barcelona, España: Paidós.

- Woods, P. (1998). *La escuela por dentro, la etnografía en la investigación educativa*. México: Paidós.
- Yackel, E. (2002). "What we can learn from analysing the teacher's role in collective argumentation". *Journal of Mathematical Behavior* 21: 423-440.
- Zill, D. (1987). *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Zubieta, G. (1996). *Sobre número y variación: antecedentes del cálculo*. Tesis Doctoral. Cinvestav, IPN.

Anexo

Notación especial

Notación especial utilizada en las transcripciones:

P	Profesor
Af	Alumna
Am	Alumno
As	Varios alumnos simultáneamente
(...)	Indica ruido de fondo y no distinguible de lo que se habla
...	Indica cortes en las secuencias

El discurso en el aula y la construcción del conocimiento matemático de Evelia Reséndiz Balderas, publicado por la Universidad Autónoma de Tamaulipas y Colofón, se terminó de imprimir en diciembre de 2019 en los talleres de Ultradigital Press S.A. de C.V. Centeno 195, Col. Valle del Sur, C.P. 09819, Ciudad de México. El tiraje consta de 400 ejemplares impresos de forma digital en papel Cultural de 75 gramos. El cuidado editorial estuvo a cargo del Consejo de Publicaciones UAT.

"PARA CREAR COSAS BUENAS
PRIMERO HAY QUE CREER
EN ELLAS"



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE
TAMAULIPAS
—1950-2020—



UAT

VERDAD, BELLEZA, PROBIIDAD



Los aspectos del aula están poblados de diferentes lenguajes que unos emiten y otros intentan interpretar correctamente, desde un punto de vista ideal. Ello conforma ese espacio común para el entendimiento mutuo, para cierta negociación de conocimientos y para la formación de significados compartidos. En tal sentido, enseñar consiste fundamentalmente en comunicar, de ahí se sugiere analizar lo que se dice y cómo se describen las cosas en clase.

El estudio del discurso escolar permite afirmar que toda institución social es un sistema de comunicación, ya que determinadas características de las instituciones docentes hacen de la comunicación un elemento decisivo. Si se asume que la interacción verbal se hace posible por la comunicación, el lenguaje aparece como un aspecto fundamental en el proceso de construcción y asignación de significados. Es necesario asignarle el papel del lenguaje verbal y no verbal un lugar privilegiado en la construcción del conocimiento y en las diversas maneras en que los maestros crean contextos comunicativos en el aula, para apoyar a los estudiantes en la construcción conjunta de la comprensión de la matemática escolar.

Para ello, se opta por fijar la atención en el papel que juega la explicación en la clase de matemáticas cuando se pretende enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados con la noción de variación, ya que el discurso explicativo es el espacio donde se construyen e interpretan los significados, tomando en cuenta la interacción de naturaleza social que se realiza en la escuela. La construcción del conocimiento durante la interacción requiere del lenguaje usado socialmente, que en esta investigación se describirá como discurso.

Publicación financiada con recurso PFCE 2020

ISBN UAT: 978-607-8750-23-8

ISBN Colofón: 978-607-635-074-4

ISBN 978-607-635-074-4

