





# **Aplicaciones del cálculo fraccionario en la descripción de fenómenos físicos y químicos**

---

Aplicaciones del cálculo fraccionario en la descripción de fenómenos físicos y químicos / Edgardo Jonathan Suárez Domínguez, coordinador. — Cd. Victoria, Tamaulipas : Universidad Autónoma de Tamaulipas ; Ciudad de México : Fontamara , 2021.

149 páginas : 17 x 23 cm

1. P - Matemáticas y ciencias

LC: QA312 A6.5 2021

Dewey: 510 - Matemáticas

---

Universidad Autónoma de Tamaulipas  
Matamoros SN, Zona Centro  
Ciudad Victoria, Tamaulipas C.P. 87000  
D. R. © 2021

Consejo de Publicaciones UAT  
Tel. (52) 834 3181-800 • extensión: 2948 • [www.uat.edu.mx](http://www.uat.edu.mx)  
Centro Universitario Victoria  
Centro de Gestión del Conocimiento. Tercer Piso  
Cd. Victoria, Tamaulipas, México. C.P. 87149  
[consejopublicacionesuat@outlook.com](mailto:consejopublicacionesuat@outlook.com)

Libro aprobado por el Consejo de Publicaciones UAT  
ISBN UAT: 978-607-8750-80-1

Editorial Fontamara, S. A. de C. V.  
Av. Hidalgo No. 47-B, Colonia Del Carmen,  
Alcaldía de Coyoacán, 04100, CDMX, México  
Tels. 555659-7117 y 555659-7978  
[contacto@fontamara.com.mx](mailto:contacto@fontamara.com.mx) • [coedicion@fontamara.com.mx](mailto:coedicion@fontamara.com.mx) • [www.fontamara.com.mx](http://www.fontamara.com.mx)  
ISBN Fontamara: 978-607-736-733-8

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra incluido el diseño tipográfico y de portada, sea cual fuere el medio, electrónico o mecánico, sin el consentimiento por escrito del Consejo de Publicaciones UAT.

Impreso en México • *Printed in Mexico*

El tiraje consta de 350 ejemplares

**Este libro fue dictaminado y aprobado por el Consejo de Publicaciones UAT mediante un especialista en la materia perteneciente al Sistema Nacional de Investigadores (SNI). Asimismo, fue autorizado por el Comité interno de selección de obras de Editorial Fontamara mediante el sistema “doble ciego” en la sesión del primer semestre 2021.**

# Aplicaciones del cálculo fraccionario en la descripción de fenómenos físicos y químicos

*Edgardo Jonathan Suárez Domínguez*

*Coordinador*

**editorial**  
**fontamara**

**UAT** Universidad Autónoma  
de Tamaulipas



C.P. Guillermo Mendoza Cavazos  
PRESIDENTE

Dra. Mariana Zerón Félix  
VICEPRESIDENTE

Dr. Leonardo Uriel Arellano Méndez  
SECRETARIO TÉCNICO

Ing. Franklin Huerta Castro  
VOCAL

Dra. Rosa Issel Acosta González  
VOCAL

Mtro. Rafael Pichardo Torres  
VOCAL

Mtro. Mauricio Pimentel Torres  
VOCAL

**Consejo Editorial del Consejo de Publicaciones de la Universidad Autónoma de Tamaulipas**

**Dra. Lourdes Arizpe Slogher** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Amalio Blanco** • Universidad Autónoma de Madrid, España | **Dra. Rosalba Casas Guerrero** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Francisco Díaz Bretones** • Universidad de Granada, España | **Dr. Rolando Díaz Lowing** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Manuel Fernández Ríos** • Universidad Autónoma de Madrid, España | **Dr. Manuel Fernández Navarro** • Universidad Autónoma Metropolitana, México | **Dra. Juana Juárez Romero** • Universidad Autónoma Metropolitana, México | **Dr. Manuel Marín Sánchez** • Universidad de Sevilla, España | **Dr. Cervando Martínez** • University of Texas at San Antonio, E.U.A. | **Dr. Darío Páez** • Universidad del País Vasco, España | **Dra. María Cristina Puga Espinosa** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. Luis Arturo Rivas Tovar** • Instituto Politécnico Nacional, México | **Dr. Aroldo Rodrigues** • University of California at Fresno, E.U.A. | **Dr. José Manuel Valenzuela Arce** • Colegio de la Frontera Norte, México | **Dra. Margarita Velázquez Gutiérrez** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dr. José Manuel Sabucedo Cameselle** • Universidad de Santiago de Compostela, España | **Dr. Alessandro Soares da Silva** • Universidad de São Paulo, Brasil | **Dr. Akexandre Dorna** • Universidad de CAEN, Francia | **Dr. Ismael Vidales Delgado** • Universidad Regiomontana, México | **Dr. José Francisco Zúñiga García** • Universidad de Granada, España | **Dr. Bernardo Jiménez** • Universidad de Guadalajara, México | **Dr. Juan Enrique Marcano Medina** • Universidad de Puerto Rico-Humacao | **Dra. Ursula Oswald** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Arq. Carlos Mario Yori** • Universidad Nacional de Colombia | **Arq. Walter Debenedetti** • Universidad de Patrimonio, Colonia, Uruguay | **Dr. Andrés Piqueras** • Universitat Jaume I, Valencia, España | **Dr. Yolanda Troyano Rodríguez** • Universidad de Sevilla, España | **Dra. María Lucero Guzmán Jiménez** • Universidad Nacional Autónoma de México | **Dra. Patricia González Aldea** • Universidad Carlos III de Madrid, España | **Dr. Marcelo Urra** • Revista Latinoamericana de Psicología Social | **Dr. Rubén Ardila** • Universidad Nacional de Colombia | **Dr. Jorge Gissi** • Pontificia Universidad Católica de Chile | **Dr. Julio F. Villegas** • Universidad Diego Portales, Chile | **Ángel Bonifaz Zeta** • Universidad Nacional Autónoma de México

## Prefacio

Frecuentemente se observan en la naturaleza fenómenos físicos y químicos en los cuales las variables que los describen muestran un comportamiento no lineal o irregular con respecto a las coordenadas espaciales y temporales, ya sea debido a su no linealidad inherente, la no homogeneidad espacial o el efecto de la amplificación de las fluctuaciones que ocurren en la escala microscópica, entre otros factores. Estos fenómenos no pueden describirse a través del empleo del cálculo ordinario y el formalismo determinista, y en la actualidad su estudio se aborda a través de la teoría de la complejidad. Esta teoría se basa en un conjunto de herramientas matemáticas, entre las que se pueden señalar: i) los métodos de solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales y la interpretación de sus soluciones, ii) la geometría fractal, que permite la caracterización de morfologías y patrones temporales irregulares, iii) los métodos de modelación estocástica, que toman en cuenta de forma explícita las fluctuaciones internas y externas que influyen sobre el sistema y iv) el cálculo diferencial fraccional, que trata acerca de la solución de ecuaciones diferenciales e integrales de orden fraccionario. De estas herramientas, tal vez la menos utilizada es el cálculo fraccionario, debido a que el tratamiento matemático involucrado es más complicado y que hay cuestiones que permanecen sin resolver, como el significado físico y geométrico del orden de las derivadas e integrales fraccionarias.

Algunos autores han relacionado el orden de las derivadas fraccionales con la dimensión fractal que caracteriza a las morfologías complejas que se generan en los procesos estocásticos, de tal forma que el comportamiento promedio de las variables se puede determinar a partir de la integración de una función regular en un espacio fractal. Otros autores señalan que no existe una prueba lógica matemática que permita hacer esta aseveración, se puede argumentar que los modelos que se obtengan bajo esta suposición no son válidos. Sin embargo, consideramos que el señalamiento más importante que se le puede hacer a un modelo para no ser rechazado es la correspondencia entre sus predicciones y las observaciones experimentales, aun cuando en su estructura matemática se establezcan suposiciones que no se pueden probar. Después de todo, no existe una prueba lógica que demuestre que debe existir una correspondencia entre las ecuaciones matemáticas a través de las cuales se expresan las leyes físicas y las observaciones experimentales, aun cuando se ha comprobado en innumerables ocasiones que esta sí existe.

Esta obra aborda el cálculo diferencial fraccionario como una herramienta para el estudio de algunos fenómenos complejos cuya mejor comprensión es importante para aquellos que trabajan en la industria. En el Capítulo 1 se analizan

las limitaciones del cálculo ordinario, que constituye el fundamento matemático a través del cual se expresan las leyes de la física clásica.

En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos generales del cálculo fraccionario, las funciones especiales de las cuales es necesario hacer uso y los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

En el Capítulo 3 se presenta una de las aplicaciones del cálculo fraccionario en la descripción de fenómenos de transporte, y que consiste en la obtención de ecuaciones constitutivas que describen la dinámica macroscópica de estos fenómenos considerando de forma explícita el efecto de los procesos de transporte molecular, y su aplicación en procesos relacionados con la dinámica del flujo laminar, el transporte de fluidos en sistemas con pérdidas de calor y las reacciones químicas heterogéneas.

En el Capítulo 4 se describe el uso del cálculo fraccional para predecir el comportamiento de los perfiles de velocidad promedio en régimen de flujo turbulento estacionario, así como la predicción cualitativa de los perfiles temporales de la velocidad local como función de la intensidad de la turbulencia.

En el Capítulo 5 se presenta un modelo para predecir la dinámica del perfil de velocidad de flujos no newtonianos en régimen laminar, el cual fue obtenido mediante la solución analítica de una ecuación diferencial parcial fraccionaria que puede ser resuelta mediante técnicas analíticas, a diferencia de lo que ocurre cuando se intenta resolver este problema mediante el cálculo ordinario, donde se obtiene una ecuación diferencial parcial de grado no entero.

En el Capítulo 6 se aborda la caracterización morfológica de las superficies sólidas y su dependencia de la dinámica estocástica asociada a su formación, así como la estimación del área superficial mediante la solución de integrales fraccionarias. Por último, en los Capítulos 7 y 8 se presenta la modelación del flujo a través de medios fracturados y porosos, respectivamente, los cuales se caracterizan por una marcada heterogeneidad y una geometría compleja.

# Índice

<b>Limitaciones del cálculo ordinario</b>	13
<i>Edgardo Jonathan Suárez Domínguez</i>	
Procesos estocásticos y patrones irregulares	15
Geometría fractal y funciones fractales	17
Comportamientos complejos en flujos	22
<b>Fundamentos generales del cálculo fraccionario</b>	25
<i>Josué F. Pérez-Sánchez</i>	
<i>Rocío R. Gallegos Villela</i>	
Definición de derivadas e integrales de orden fraccionario	27
Definición de Riemann-Liouville	29
Definición de Caputo	32
Funciones especiales relacionadas con el cálculo fraccional	34
Ecuaciones diferenciales fraccionarias	39
Métodos analíticos	39
Métodos numéricos	41
Ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias	43
<b>Ecuaciones constitutivas y fenómenos de transporte</b>	49
<i>Arturo Palacio Pérez</i>	
Obtención de la ecuación constitutiva	52
Variación temporal del flujo	54
Cambio salto escalón en el gradiente de presión	57
Cambio exponencial en el gradiente de presión	58
Variación temporal de las pérdidas de presión por fricción	59
Pérdidas de calor en flujos estacionarios	61
Reacción química con difusión	66
<b>Turbulencia</b>	71
<i>Alejandro Rodríguez Valdés, Arturo Palacio Pérez</i>	
Enfoque determinista	73
Solución empírica	75
Enfoque estocástico	78
Enfoque basado en la teoría de la complejidad	79
Aplicación del cálculo fraccionario para la modelación de flujos turbulentos en tubos	80

<b>Dinámica del flujo laminar no newtoniano en tubos</b>	<b>85</b>
<i>Elena F. Izquierdo Kulich</i>	
<i>Susana González Santana</i>	
Reología de los fluidos no newtonianos	87
Solución de estado estacionario	88
Equivalencia entre la ecuación diferencial fraccionaria y la ecuación diferencial de grado no entero	90
Solución de estado no estacionario	91
<b>Superficies sólidas</b>	<b>97</b>
<i>Rocío R. Gallegos Villela</i>	
<i>Lisbeth A. Brandt García</i>	
<i>Ruth Galindo López</i>	
Modelación estocástica de la formación de la superficie	100
Caracterización a través de la geometría fractal	103
Área superficial	106
<b>Flujo a través de medios fracturados</b>	<b>109</b>
<i>Elena Francisca Izquierdo Kulich</i>	
Morfología y dimensiones de las fracturas	112
Perfil de velocidad en las fracturas	114
Estimación del flujo volumétrico a través del medio fracturado	116
<b>Flujo a través de medios porosos</b>	<b>119</b>
<i>Carlos Zúñiga Leal</i>	
<i>Yolanda G. Aranda Jiménez</i>	
<i>Laura M. Chimely</i>	
Relación entre la porosidad y la dimensión fractal de la distribución de partículas	122
Estimación del perfil de velocidad del flujo en medio poroso	126
Velocidad promedio del flujo en lechos porosos	127
Gradiente de presión	128
Resultados teóricos predichos y discusión	128
<b>Anexo</b>	<b>137</b>
Tabla de la transformada de Laplace de diferentes tipos de funciones	139
Funciones de potencia	139
Funciones hiperbólicas	141

Funciones trigonométricas	141
Funciones exponenciales	141
Funciones dadas por el producto de una función exponencial y una función trigonométrica	142
Funciones dadas por el producto de funciones exponenciales e hiperbólicas	143
Funciones dadas por el producto de funciones trigonométricas e hiperbólicas	143
Funciones de Bessel	143
Función error complementaria	144
Función de Dirac	144
Función salto unitario	144
Expresiones generales	145
<b>Bibliografía</b>	<b>147</b>



# Limitaciones del cálculo ordinario

*Edgardo Jonathan Suárez Domínguez*



El cálculo fraccionario se originó casi al mismo tiempo que el cálculo ordinario, cuando Leibniz, en 1695, especuló acerca de qué sucedería si se determinaba la derivada de orden  $1/2$  de un monomio, obteniendo una solución correcta. La aplicación de este cálculo fue dejada a un lado en favor del uso del cálculo diferencial ordinario, el cual constituye la base del formalismo matemático a través del cual se expresan las leyes fundamentales de la física clásica.

Sin embargo, el enfoque de la física clásica resulta inapropiado cuando se intenta describir fenómenos como las transiciones de fase, la turbulencia, el comportamiento reológico complejo que manifiestan determinados materiales, así como de sistemas que son capaces de auto organizarse lejos del equilibrio termodinámico. En estos casos es necesario emplear un tipo de análisis que involucra el empleo de funciones no analíticas y no diferenciales, técnicas numéricas de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales y el uso de la geometría fractal, todo lo cual constituye la base de la teoría de la complejidad.

El desarrollo de la teoría de la complejidad ha estimulado a los matemáticos y a los físicos a investigar la validez y el alcance del cálculo fraccionario como herramienta para la descripción de procesos que manifiestan un comportamiento irregular y no lineal.

Si bien se han escrito numerosos e importantes textos que tratan con los aspectos puramente matemáticos, aún quedan cuestiones pendientes de resolver en relación con su aplicación en la descripción de fenómenos naturales. Entre estas están el explicar el significado físico y el valor del orden no entero de las derivadas e integrales y la dificultad para la interpretación geométrica de estas, así como su relación con las condiciones iniciales y de contorno que describen los procesos bajo estudio. A pesar de estas cuestiones pendientes, el análisis del empleo del cálculo fraccionario como una vía para superar las limitaciones de la física clásica constituye un tema de investigación de gran importancia y actualidad. En las siguientes secciones de este capítulo presentamos tres fenómenos típicos en los cuales se ha demostrado las limitaciones del empleo del cálculo ordinario y el formalismo determinista para su descripción, y donde se ha estudiado la posibilidad de emplear el cálculo fraccionario como una vía de superar estas limitaciones.

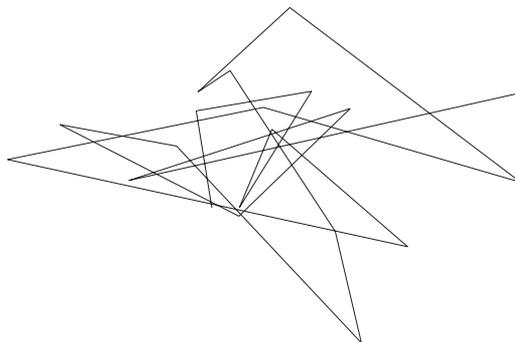
## **Procesos estocásticos y patrones irregulares**

En el contexto actual de la física el concepto de espacio y tiempo absolutos, e independiente de la materia, ha dejado de ser válido, así como el empleo de la geometría de Euclides para la descripción de fenómenos en escalas demasiado grandes o pequeñas en relación con la escala habitual de observación. Al respecto, Ludwig Boltzmann señaló que la consideración de un movimiento recto y uniforme,

bajo la acción de fuerzas invariantes, resulta muy difícil de probar, incluso durante un intervalo de tiempo muy corto. La modelación de tales procesos se basa en el uso de funciones analíticas diferenciales, las que sin embargo no prueban la validez de esta consideración. De hecho, existe un conjunto mucho más grande de funciones no diferenciables que pueden también ser empleadas con éxito para la descripción de tales fenómenos, por lo que llega a la conclusión de que la diferenciabilidad es también una suposición, cuya validez se debe comprobar empíricamente.

El movimiento browniano constituye uno de los paradigmas más interesantes de la física estadística. Este fenómeno, relativo al movimiento irregular de una partícula en el seno de un fluido, fue reportado por primera vez por Brown, y explicado correctamente por Einstein, quien atribuyó este a los choques aleatorios de la partícula con las moléculas del fluido. Una representación de la trayectoria de la partícula se muestra en la Figura 1.1.

Figura 1.1. Trayectoria de la partícula en el movimiento browniano



Fuente: elaboración propia.

Para obtener esta descripción Einstein empleó el formalismo estocástico, una rama de las matemáticas que hasta ese momento se consideraba sin aplicación práctica, y que a partir de entonces ha sido empleado con éxito en la descripción de fenómenos en los cuales las variables que los describen se caracterizan por presentar un comportamiento temporal fluctuante e impredecible con respecto a sus valores promedios. El formalismo estocástico se basa en la propiedad de Markov, que considera que el valor futuro de una variable depende del valor en el instante presente, no importa la forma en la cual este fue alcanzado.

Esta consideración de ruptura entre el pasado y el futuro es válida solo cuando existe una escala de separación temporal entre los procesos microscópicos y los macroscópicos, y el sistema tiende a un estado estacionario estable cuya función de probabilidad es normal o gaussiana.

Cuando no se puede establecer esta separación de escalas temporales se manifiestan efectos de memoria e interacciones no locales de largo alcance, y no se cumple la propiedad de Markov. Como resultado la función de probabilidad no es gaussiana, y las funciones de correlación temporal se comportan como funciones potenciales inversas, en lugar de exhibir un comportamiento exponencial decreciente. El resultado ha sido tomado como base por autores para proponer ecuaciones de difusión de orden fraccionario para describir este comportamiento.

### **Geometría fractal y funciones fractales**

En la década del 60 del siglo XX Benoit Mandelbrot desarrolló los principios de la geometría fractal, la cual resulta más apropiada para describir los patrones complejos que se presentan en la naturaleza, tales como los que se observan en las costas, las nubes y las montañas (Figura 1.2), así como en las trayectorias espaciales que describen determinados objetos, tales como las que se observan en el movimiento browniano (Figura 1.1).

La geometría fractal se basa en describir la morfología espacial y temporal de los objetos irregulares mediante una dimensión no entera, conocida como dimensión fractal, la cual se relaciona con la capacidad del objeto para cubrir el espacio dentro del cual este se encuentra inmerso.

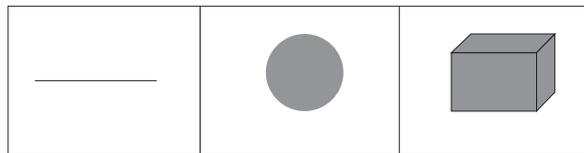
Figura 1.2. Islas y rocas en la naturaleza



Fuente: elaboración propia.

Para un objeto regular la dimensión fractal es un número entero que se corresponde con la dimensión geométrica del espacio euclidiano considerado: **0** para un punto, **1** para una línea recta, **2** para un plano y **3** para una figura en el espacio (Figura 1.3). Para los objetos regulares es posible, al menos en principio, determinar su tamaño (área para un objeto plano, volumen para un objeto en el espacio) a partir del empleo del cálculo integral ordinario.

Figura 1.3. Objetos regulares: Línea ( $d=1$ ), Círculo ( $d=2$ ) y Cubo ( $d=3$ )



Fuente: elaboración propia.

Existen diferentes definiciones matemáticas de dimensión fractal, las que dependen de las características morfológicas y de escalado del objeto bajo estudio. En este texto haremos siempre referencia a la dimensión fractal de capacidad  $f$ , que es la más frecuentemente utilizada y quizás la más fácil de visualizar. Esta dimensión se relaciona con la fracción espacial que ocupa el objeto dentro del espacio euclidiano donde está inmerso.

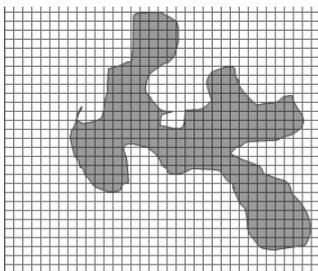
El tamaño  $\Phi$  del objeto irregular (área, longitud o volumen) se determina como:

$$\Phi = \kappa^n L^f$$

donde  $\kappa \leq 1$  es la precisión de la medición o nivel de magnificación en que se observa el objeto,  $L > 1$  representa la longitud característica del objeto, igual a la longitud de la línea recta que une dos puntos extremos que pertenecen al objeto y  $n$  es la dimensión del objeto regular equivalente.

A los efectos prácticos la dimensión fractal de capacidad se estima a partir de una imagen binaria en un plano ( $2D$ ) del objeto que se analiza, y se relaciona con el contenido de sustancia que se encuentra en una región de longitud característica  $L$ . El método que se emplea, conocido como conteo de cajas (*box count*), se basa en dividir la imagen en  $N_t$  celdillas de tamaño  $l$  (Figura 1.4), contándose el número de celdillas  $N_p$  dentro de las cuales se aprecia la presencia del objeto en cuestión.

Figura 1.4. División del área en celdillas para calcular la dimensión fractal



Fuente: elaboración propia.

La idea consiste en ir disminuyendo progresivamente el tamaño  $l$  de la celdilla y contando las celdillas llenas  $N_p(l)$ , de tal forma que la dimension fractal se determina como:

$$f = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N_p(l)}{\ln N_t(l)}$$

Las líneas irregulares deben ser visualizadas en un plano, ya que su longitud es mayor que la correspondiente a una línea regular. En este caso la dimensión fractal se encuentra entre 1 y 1.5, donde el coeficiente de rugosidad  $\alpha \in (0.5; 1)$  se determina como:

$$\alpha = 2 - f$$

Los objetos irregulares en  $2D$  ocupan un área menor que la del objeto regular equivalente (en este caso un plano), y su dimensión fractal se encuentra entre 1 y 2.

Las áreas de superficies rugosas deben visualizarse en un volumen, ya que su valor es mayor que la correspondiente a un área regular, y su dimensión fractal se encuentra entre 2 y 2.5.

Los objetos irregulares en  $3D$  ocupan un volumen menor que la del objeto regular equivalente (en este caso un cubo) y su dimensión fractal se encuentra entre 2 y 3.

Como es conocido, las longitudes, áreas y volúmenes pueden ser obtenidos a través de la aplicación del cálculo ordinario. Por ejemplo, el área bajo una curva  $y = f(x): x \in [a, b]$  se determina como:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

De forma equivalente, el tamaño de un objeto irregular puede ser estimado haciendo uso de integrales fraccionarias, donde en vez de integrar una función irregular en un espacio euclidiano, se integra una función regular sobre un espacio fractal, aspectos que serán analizados con mayor profundidad en el Capítulo 6.

Existen diferentes autores que han intentado relacionar las propiedades geométricas de los objetos fractales con las funciones fractales, las cuales carecen de una escala de longitud característica, de tal manera que, a pesar de ser funciones analíticas, cumplen con la propiedad de que su derivada diverge. La función de Weierstrass es una de las más conocidas, y está dada por:

$$W(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{a^n} \sin(b^n x)$$

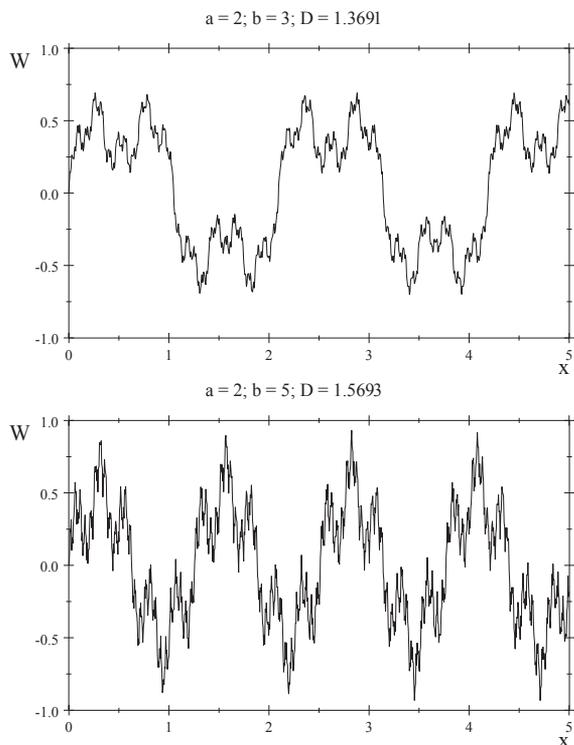
siendo su derivada:

$$\frac{dW(x)}{dx} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{b}{a}\right)^n \cos b^n x$$

Nótese que esta función muestra un comportamiento regular y diferenciable cuando  $b < a$ , pero esto no ocurre así en caso contrario. Como se muestra en la Figura 1.5 cuando  $b > a$  la función permite generar una línea irregular de dimensión fractal  $f$ , la cual depende de los valores de  $a$  y  $b$ :

$$f = 2 - \frac{\ln a}{\ln b}$$

Figura 1.5. Líneas irregulares generadas por la Función de Weierstrass

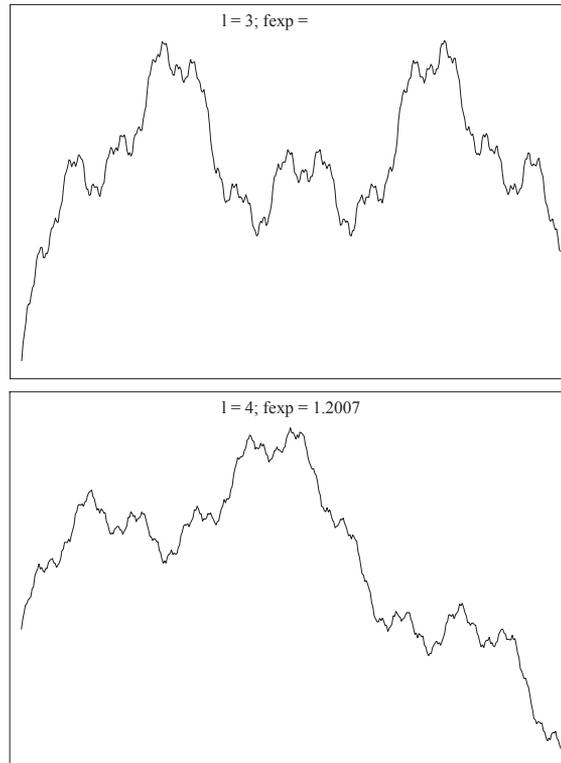


Fuente: elaboración propia.

Si se toma en cuenta la ecuación (rugosidad) se obtiene la función de Weierstrass expresada como función de la dimensión fractal  $f$  y de un parámetro  $l$  ( $a=l; b=l^{2-f}$ ):

$$W(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{l^{(2-f)n}} \sin(l^n x)$$

Figura 1.6. Líneas de Weierstrass con  $f=1.2$  para  $l=3,4$  y valor de  $f_{exp}$  calculado



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 1.6 se muestran dos líneas de Weierstrass con  $f=1.2$  para diferentes valores de  $l$ , y el valor de dimensión fractal  $f_{exp}$  determinada a partir del programa de tratamiento de imágenes ImageJ. Nótese como existe una correspondencia entre el valor de la dimensión fractal teórica y la dimensión fractal experimental, lo que sugiere la utilidad de esta función para la generación de morfologías fractales.

Esta aparente relación entre las funciones fractales y la dimensión fractal ha motivado a algunos autores a emplear el cálculo fraccionario como una vía para la determinación del tamaño de objetos irregulares, mientras que otros plantean que no existe una base lógico-matemática para plantear dicha relación.

## Comportamientos complejos en flujos

En 1926, Richardson publicó los resultados experimentales observados en relación con el comportamiento de la velocidad del viento, encontrando que esta variable fluctúa aleatoriamente, tanto en magnitud, como en dirección. Este mismo fenómeno se observa en los líquidos cuando la velocidad del flujo excede un determinado valor máximo, el cual depende de la geometría del sistema y de las propiedades físicas del fluido, y se conoce como turbulencia. La existencia de la turbulencia se manifiesta en el comportamiento ondulado de la superficie del mar (Figura 1.7) y en los vórtices y remolinos que aparecen frecuentemente en las corrientes de agua de los ríos.

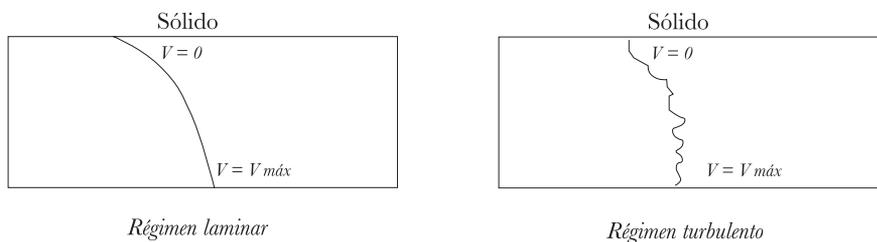
Figura 1.7. Flujo de agua en mares y ríos



Fuente: elaboración propia.

El comportamiento relacionado con el movimiento de los líquidos se describe a través de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales expresan las leyes de conservación de la cantidad de movimiento. Son ecuaciones deterministas, cuya solución usualmente predice patrones regulares en la velocidad del flujo, los cuales solamente se observan a muy bajas velocidades, en lo que se conoce como régimen laminar. En régimen turbulento las fluctuaciones en la velocidad se amplifican hasta tomar valores comparables al valor promedio, de tal manera que las capas de flujo se mezclan entre sí y pueden originar patrones de flujo complejos que no pueden ser modelados con el enfoque determinista (Figura 1.8).

Figura 1.8. Perfiles de velocidad en régimen laminar y turbulento



Fuente: elaboración propia.

Se han empleado diferentes formalismos para la descripción de la turbulencia, cada uno con sus aciertos y limitaciones, entre los que se pueden mencionar: i) el enfoque tradicional, basado en la división del flujo en una subregión laminar, próxima al sólido, y una subregión turbulenta, donde la velocidad promedio es independiente de la posición espacial, ii) el enfoque empírico, basado en las observaciones experimentales y que es el utilizado en las aplicaciones de ingeniería, iii) el enfoque estocástico, que lleva a la definición de una viscosidad turbulenta, propiedad del flujo y análoga a la viscosidad como propiedad física del fluido, iv) la teoría de la complejidad, que se basa en la identificación de patrones de flujo y v) el enfoque basado en el cálculo fraccional, en el cual el perfil de velocidad se visualiza como una función determinista que evoluciona en un espacio fractal, lo cual se toma en consideración expresando las ecuaciones de Navier-Stokes como ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.



# Fundamentos generales del **cálculo fraccionario**

*Josué F. Pérez-Sánchez*

*Rocío R. Gallegos Villela*



El cálculo fraccional es la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las derivadas e integrales de orden fraccionario. Estas operaciones matemáticas fueron estudiadas por Leibniz, Euler, Laplace, Lacroix, y Fourier, quienes establecieron diferentes definiciones de derivadas e integrales de orden fraccionario.

La aplicación de las operaciones fraccionarias se llevó a cabo por vez primera vez en 1823, cuando Niels Henrik Abel hizo uso de este formalismo para resolver la ecuación integral que se obtiene en el problema del tautocromo, que consiste en obtener la forma de la curva que describe un punto que se desliza sin fricción debido a la gravedad, bajo la condición de que el tiempo requerido para alcanzar el punto final sea independiente de la posición del punto inicial. Esta cuestión permaneció prácticamente olvidada hasta 1974, cuando Oldham y Spanier publicaron el primer libro de texto sobre derivadas e integrales fraccionarias, y en 1975 se llevó a cabo el primer congreso sobre este tema. Desde entonces se han escrito numerosos textos y artículos relacionados con la aplicación de este formalismo en física e ingeniería.

En este capítulo se describen brevemente los fundamentos y las definiciones más importantes relacionadas con el cálculo fraccionario.

### **Definición de derivadas e integrales de orden fraccionario**

En el cálculo ordinario las derivadas e integrales son propiedades locales de las funciones matemáticas, que pueden ser extrapoladas al sistema en su conjunto. En contraste, las derivadas e integrales de orden fraccionario son propiedades no locales, que dependen del comportamiento del sistema en su conjunto, y no pueden inferirse a partir de las propiedades locales. Más bien ocurre a la inversa: las derivadas fraccionarias se relacionan con los sistemas en los cuales las propiedades locales están influidas por las propiedades del sistema en su conjunto. Por ejemplo, en los procesos donde las correlaciones temporales son significativas se ponen de manifiesto efectos de “memoria”, los cuales pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales temporales de orden menor que 1. De forma semejante, los sistemas en los cuales existen correlaciones espaciales de largo alcance pueden describirse a través de ecuaciones diferenciales espaciales de orden no entero.

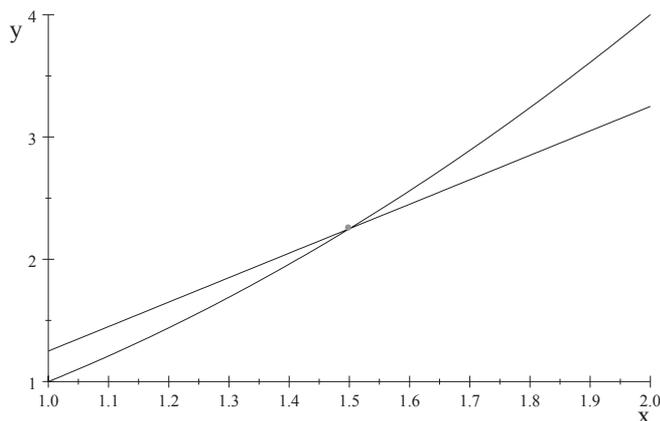
El cálculo fraccionario se relaciona estrechamente con la teoría de los operadores. En el cálculo ordinario el operador  $Dx$  se corresponde con la primera derivada respecto a  $x$ ,  $D_x^2$  con la segunda derivada, etcétera, donde:

$$D_x[f(x)] = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

A partir de esta definición es relativamente fácil establecer la correspondencia entre las derivadas de orden entero y su significado geométrico, en este caso la pendiente

de la tangente a un punto de la curva, como se ilustra en la Figura 2.1, que muestra la función  $y=x^2$  y la recta cuya pendiente es igual a la derivada de la función evaluada en  $x=1.5$ .

Figura 2.1. La pendiente de la tangente a un punto es la derivada



Fuente: elaboración propia.

En el caso de la integral de orden entero se escribe:

$$\begin{aligned}
 {}^b_c \mathbf{D}_x^{-1}[f(x)] &= \int_c^b f(x) dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a+i \frac{b-a}{n}\right)
 \end{aligned}$$

y su significado geométrico se interpreta como el área bajo la curva definida por  $f(x)$  y que se encuentra acotada entre  $x=a$  y  $x=b$ , como se muestra en la Figura 2.2 donde el área representa a  ${}_{1.5}^{1.8} \mathbf{D}_x^{-1}[x^2]$ .

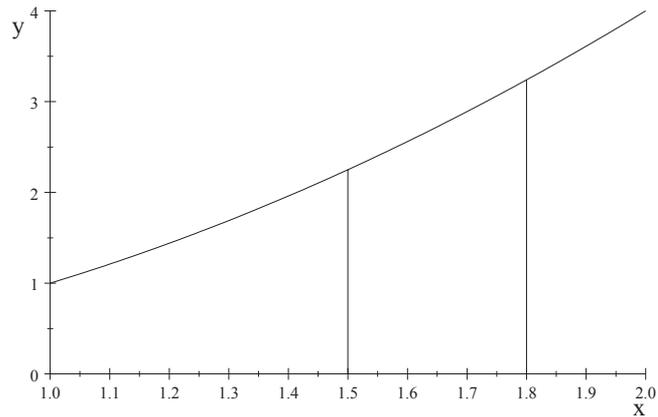
En el cálculo fraccionario el objetivo es encontrar la regla de transformación de una función en otra que se establece cuando se aplica el operador  $D^\alpha$ , donde  $\alpha$  es cualquier número real o imaginario. En la versión moderna del cálculo fraccionario el operador fraccionario se escribe:

$${}^c \mathbf{D}_x^\alpha [f(x)] = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)$$

donde  $x$  es la variable independiente,  $c$  es el valor inicial de  $x$  y  $\alpha$  es el orden fraccionario. Cuando  $\alpha < 0$  se establece la operación de integración, mientras que cuando  $\alpha > 0$  corresponde a la operación de derivación. Desafortunadamente

no es nada trivial establecer la correspondencia entre las derivadas e integrales fraccionarias y su significado geométrico, como ocurre en el caso de las derivadas e integrales de orden entero, por lo que se han obtenido diferentes definiciones de acuerdo con las consideraciones establecidas por sus autores.

Figura 2.2. El área bajo la curva es la integral de orden 1



Fuente: eElaboración propia.

### Definición de Riemann-Liouville

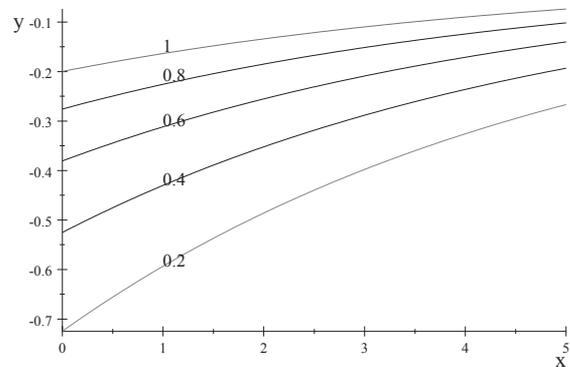
La primera definición formal importante de derivada fraccional fue establecida por Liouville, quien parte del resultado bien conocido relacionado con la derivada enésima de la función exponencial:

$$D^n_x \exp(ax) = a^n \exp(ax)$$

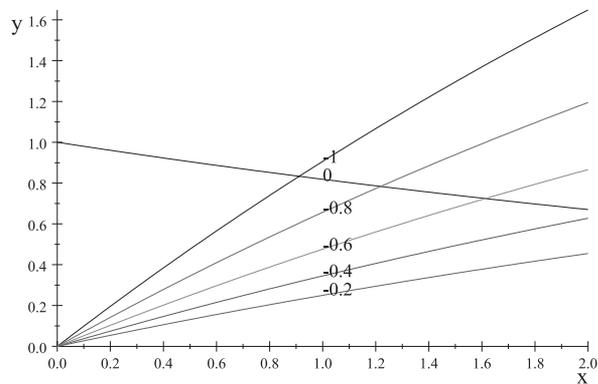
y generalizó este para el caso de un orden fraccional  $\alpha$  (Figura 2.3):

$$D^\alpha_x \exp(ax) = a^\alpha \exp(ax)$$

Figura 2.3. Derivadas e integrales fraccionarias de la función exponencial



$$D^{\alpha} [\exp(-0.2x)] : \alpha = .2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$$



$$D^{\alpha} [\exp(-0.2x)] : \alpha = -1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2$$

Fuente: elaboración propia.

De esta manera, si una función  $f(x)$  puede ser desarrollada en forma de una serie exponencial:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(a_k x)$$

entonces su derivada puede ser expresada de la forma:

$$D_x^{\alpha} [f(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha} c_k \exp(a_k x)$$

Liouville aplicó este resultado para el caso particular de una función potencial  $x^\alpha$  obteniendo:

$$\mathbf{D}_x^\alpha [x^{-z}] = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z)} x^{-z-\alpha}$$

donde  $\Gamma(t)$  es la función gamma (Figura 2.4), que constituye una generalización del factorial y que se define como:

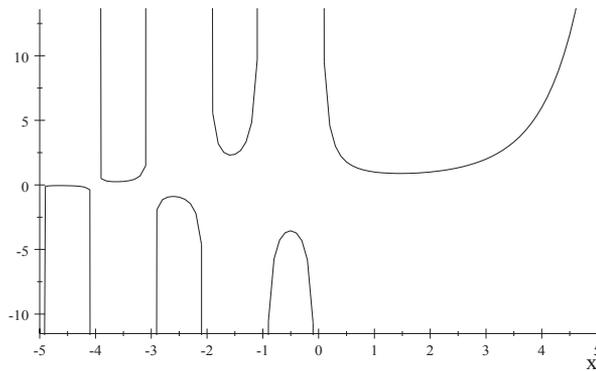
$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy$$

$$\Gamma(t) = (t-1)!$$

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

Figura 2.4. Comportamiento de la función gamma



$$\text{Función Gamma } \Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$$

Fuente: elaboración propia.

El resultado obtenido por Liouville fue generalizado por Riemann, quien se basa en la formulación de integración repetida:

$$\int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 \dots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-u)^{n-1} f(u) du$$

de tal manera que expresando el factorial a través de la función gamma obtiene la definición de integral fraccional:

$${}_a\mathbf{D}_x^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1} f(u) du$$

Considerando que el operador diferencial fraccionario cumple con la propiedad:

$${}_a\mathbf{D}_x^{\alpha+\beta} = {}_a\mathbf{D}_x^{\alpha} {}_a\mathbf{D}_x^{\beta}$$

se obtiene la derivada fraccional de Riemann - Liouville (RL):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_x^{\alpha}[f(x)] &= \frac{d^m}{dt^m} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right) \\ &= {}_a\mathbf{D}_x^m ({}_a\mathbf{D}_x^{-m+\alpha}) [f(x)] \\ &\quad : \text{entero} \\ &\quad m < a < m+1 \end{aligned}$$

Nótese que, a diferencia del caso de las derivadas de orden entero, la derivada fraccional de RL de una constante es diferente de cero, por lo que de manera general el operador de orden fraccional de RL no conmuta:

$$\begin{aligned} {}_a\mathbf{D}_x^{q+p}[f(x)] &= {}_a\mathbf{D}_x^{p+q}[f(x)] - \sum \left[ g(a) \times \frac{(x-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)} \right] \\ g(x) &= {}_a\mathbf{D}_x^{p+q}[f(x)] \\ m-1 &\leq p < m \end{aligned}$$

La no conmutación asociada a este operador, así como el valor diferente de cero de la derivada de una constante, son dos factores que limitan el empleo de esta definición para la descripción de procesos físicos, donde la solución de las ecuaciones diferenciales depende significativamente de las condiciones iniciales y de contorno.

### Definición de Caputo

Existen otras aproximaciones que permiten generalizar el concepto de operador fraccional y superar las limitaciones de la definición de RL en relación con sus aplicaciones en la física. La definición que se emplea con mayor frecuencia y se usa en este texto, es la definición Caputo, la cual establece que la derivada de orden  $\alpha$  está dada por:

$${}_0\mathbf{D}^\alpha[f(x)] = \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x \mathbf{D}^m[f(x)] \frac{1}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt \right)$$

$m$ : entero  
 $m-1 < \alpha < m$

A diferencia de la derivada fraccional de RL, la derivada fraccional de Caputo de una constante  $C$  es igual a cero. Por lo tanto, se cumple la relación de conmutación:

$$\mathbf{D}^{p+q}[f(x)] = \mathbf{D}^q \mathbf{D}^p[f(x)]$$

y la transformada de Laplace de la derivada queda expresada como una función de las derivadas de orden entero:

$$\mathcal{L}(\mathbf{D}_x^\alpha[f(x)]) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} g_k(0)$$

$$g_k(x) = \mathbf{D}_x^k[f(x)]$$

$$n-1 \leq \alpha \leq n$$

La derivada fraccional de Caputo tiene las siguientes propiedades:

- Derivadas secuenciales

$$\mathbf{D}^{\alpha_1} \mathbf{D}^{\alpha_2} \dots \mathbf{D}^{\alpha_n} = \mathbf{D}^\alpha$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha$$

- Relación de homogeneidad

$$\mathbf{D}_x^\alpha[Cx f(x)] = Cx \mathbf{D}_x^\alpha[f(x)]$$

$$C = cte$$

- Relación de escalado para la derivada fraccional

$$\mathbf{D}_t^\alpha[f(t)] = \beta^{-\alpha} \mathbf{D}_y^\alpha[f(y)]$$

$$t = \beta y$$

$$\beta = cte$$

- Linealidad

$$\mathbf{D}^\alpha[\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)] = \lambda_1 \mathbf{D}^\alpha[f_1(x)] + \lambda_2 \mathbf{D}^\alpha[f_2(x)]$$

- Regla de Leibniz para la derivada fraccional del producto de dos funciones:

$${}_a \mathbf{D}_x^\alpha [y(x) \times f(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1) \Gamma(p-k+1)} g_k(a) \times ({}_a \mathbf{D}_x^{p-k} f(x))$$

$$g_k(x) = \mathbf{D}^k [y(x)]$$

- Fórmula de inversión

$$\mathbf{D}^\alpha [f(x)] = F(x)$$

$$f(x) = \mathbf{D}^{-\alpha} [F(x)] + C_1 x^{\alpha-1} + C_2 x^{\alpha-2} + \dots + C_m x^{\alpha-m}$$

$$\alpha > 0: \alpha \in (m; m+1)$$

$$\alpha \leq 0: m=0$$

## Funciones especiales relacionadas con el cálculo fraccional

La aplicación de la relación (*der caputo*) de forma directa para la determinación de la derivada fraccional de una función resulta bastante complicado, por lo que, al igual que ocurre en el cálculo ordinario, se suelen especificar en tablas matemáticas las derivadas de las funciones que se emplean con mayor frecuencia.

Las funciones que se muestran en la Tabla 2.1 juegan un papel de especial importancia en la teoría de la diferenciación de orden arbitrario y en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Algunas de estas funciones constituyen la derivada o integral de una función analítica específica, mientras que otras aparecen involucradas en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionarias. En la Figura 2.5 se muestran los comportamientos de estas funciones para diferentes valores de sus parámetros.

Tabla 2.1. Funciones especiales relacionadas con el cálculo fraccional

Función	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
potencial	$t^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
Mittag-Leffler	$ML(t; a, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^{nq}}{\Gamma(nq+1)}$	$\frac{s^q}{s(s^q - a)}$
Mittag-Leffler general	$MLG(t; a, \alpha, \beta, k) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} \frac{d^k}{dt^k} \frac{(at^\alpha)^n}{\Gamma(an + \beta)}$	$\frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}}$
Agarwal	$AG(t; a, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(m + \frac{\beta-1}{\alpha})}{\Gamma(\alpha m + \beta)}$	$\frac{s^{\alpha - \beta}}{s^\alpha - 1}$
Robotnov-Hartley	$RH(t; a, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^{(n+1)q-1}}{\Gamma((+1)q)}$	$\frac{1}{s^q - a}$

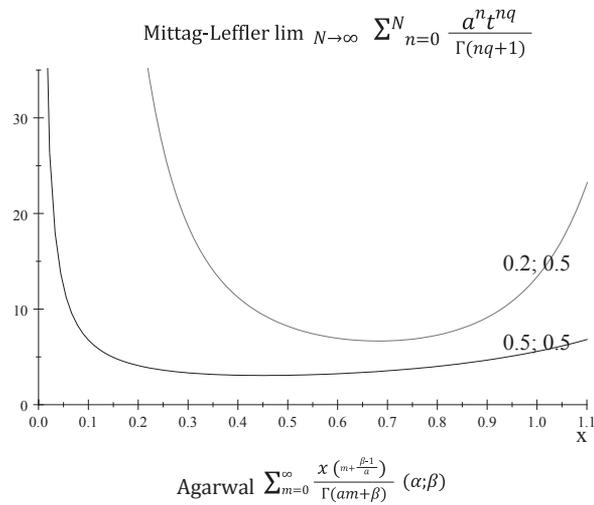
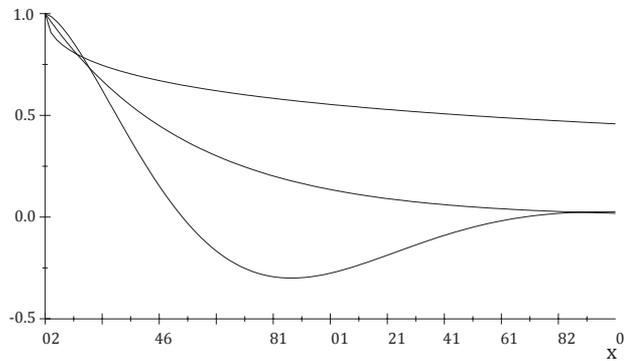
Función	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
Miller-Ross	$MR(t;a,v)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^k t^{k+v}}{\Gamma(v+k+1)}$	$\frac{s^{-v}}{s-a}$
Coseno generalizado	$^{[1]}CG(t;v,a)=t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{2k}{2}} (at)^{2k}}{\Gamma(v+2k+1)}$	$\frac{s}{s^v(s^2+a^2)}$
Seno generalizado	$^{[2]}SG(t;v,a)=t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{(2k+1)-1}{2}} (at)^{(2k+1)}}{\Gamma(v+(2k+1)+1)}$	$\frac{a}{s^v(s^2+a^2)}$

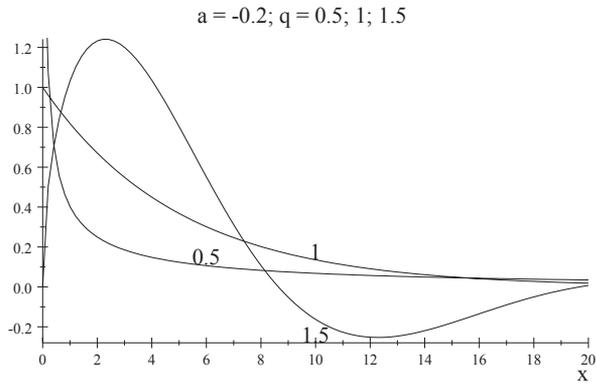
<sup>[1]</sup>: $\text{Re}(v)>-1$

<sup>[2]</sup>: $\text{Re}(v)>-2$

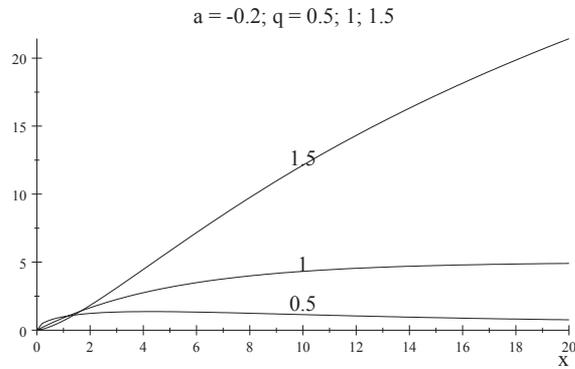
Fuente: elaboración propia.

Figura 2.5. Funciones relacionadas con el cálculo fraccional

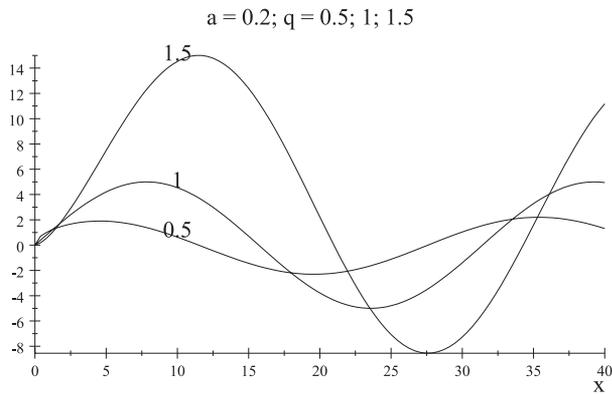




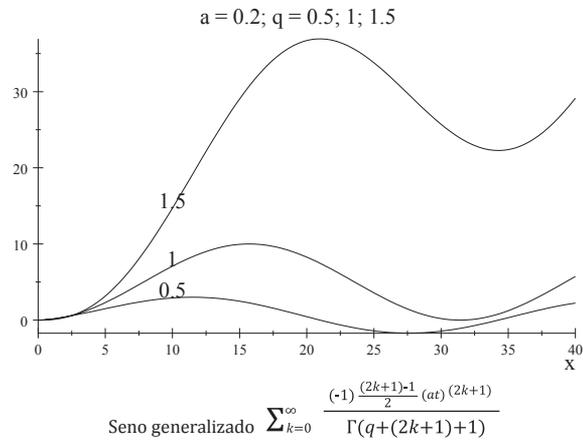
Robotnov-Hartley  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{a^n t^{(n+1)q-1}}{\Gamma((n+1)q)}$



Miller-Ross  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{k+q}}{\Gamma(q+k+1)}$



Coseno generalizado  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{2k}{2}} t^q (at)^{2k}}{\Gamma(q+2k+1)}$



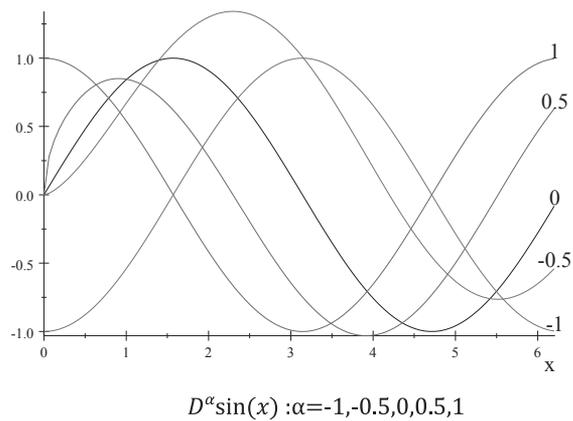
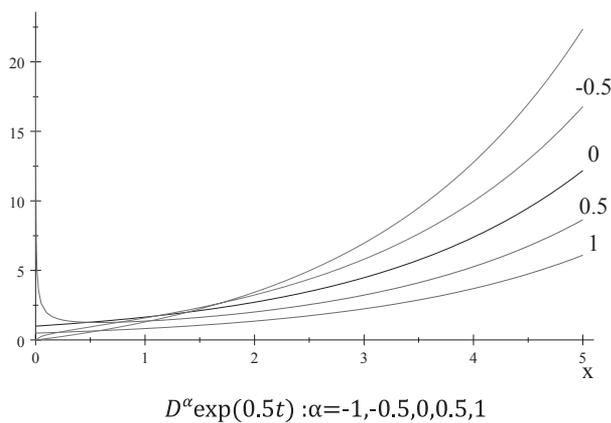
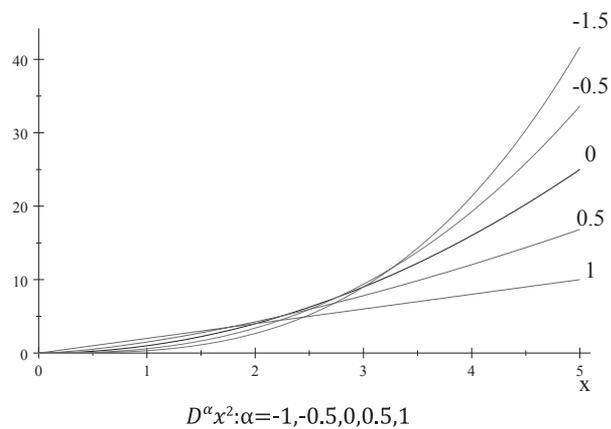
Fuente: elaboración propia.

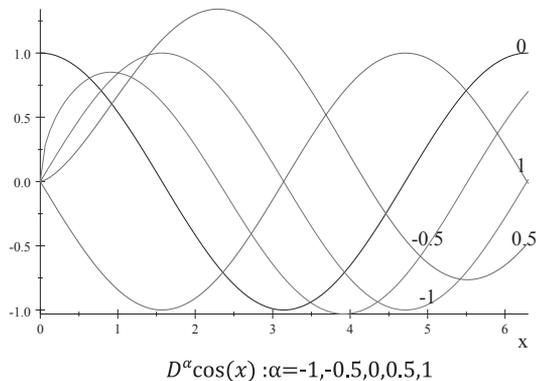
En la Tabla 2.2 se muestran las derivadas ( $\alpha > 0$ ) e integrales ( $\alpha < 0$ ) fraccionarias de algunas funciones analíticas que se emplean frecuentemente, y en la Figura 2.6 el comportamiento de estas funciones para diferentes órdenes del operador fraccional.

Tabla 2.2. Derivadas de las funciones especiales

$f(t)$	$0D_x^\alpha$
	$0: \alpha > 0$
$C = cte$	$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{-\alpha}; \alpha < 0$
$x^n$	$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}$
$\exp(at)$	$MR(t; a, -a)$
$\sin(at)$	$CG(t; 1-\alpha, a)$
$\cos(at)$	$SG(t; \alpha, a)$

Figura 2.5. Ploteo de las derivadas e integrales fraccionarias de funciones relacionadas con el cálculo fraccional





Fuente: elaboración propia.

## Ecuaciones diferenciales fraccionarias

Las ecuaciones diferenciales fraccionarias son aquellas que involucran derivadas de orden fraccional, y al igual que las ecuaciones diferenciales de orden entero pueden ser homogéneas, no homogéneas, lineales y no lineales. La solución de este tipo de ecuaciones resulta ser más complicada que en el caso de las ecuaciones diferenciales de orden entero y, al igual que en este caso, pueden aplicarse métodos analíticos o métodos numéricos, dependiendo de la estructura de la ecuación.

### Métodos analíticos

Los métodos analíticos solo pueden ser aplicados en casos relativamente simples, como en el caso de una ecuación diferencial fraccionaria lineal secuencial. Este tipo de ecuación, cuyo orden se expresa como  $(n, \frac{1}{v})$  tiene la forma general:

$$(A_0 \mathbf{D}_x^{nv} + A_1 \mathbf{D}_x^{(n-1)v} + A_2 \mathbf{D}_x^{(n-2)v} + \dots + A_n \mathbf{D}_x^0) y(x) = g(x)$$

$$\sum_{k=0}^n A_k \mathbf{D}_x^{(n-k)v} y(x) = g(x)$$

$(n, \frac{1}{v})$ : enteros positivos

donde los coeficientes  $A_k$  son constantes. Para la solución particular de esta ecuación deben especificarse  $b = [nv] + 1$  condiciones iniciales, donde  $[nv]$  simboliza el mayor entero que es menor que  $nv$ , de tal forma que:

$$[nv] < nv < [nv] + 1$$

Así, una ecuación diferencial donde el orden mayor de la derivada es igual a 1.5 requiere la especificación de 1 condición inicial o de contorno, mientras que en el

caso de que el orden mayor sea 3.7 se requiere la especificación de 3 condiciones iniciales o de contorno.

Si se asume la definición de Caputo y se aplica la transformada de Laplace a la ec. (edf 2) esta queda se reescribe como una ecuación algebraica:

$$\sum_{k=0}^n A_k s^{(n-k)v} Y(s) = G(s) + \sum_{m=0}^{b-1} C_m \times s^{nv-1-m}$$

$$C_m = A_k \times y^{(m)}(0)$$

donde  $C_m$  son las constantes que se relacionan con las condiciones iniciales o de contorno,  $y^{(m)}$  es la derivada de orden entero  $m$  evaluada en el punto inicial. Despejando  $Y(s)$  se obtiene:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{\sum_{k=0}^n A_k s^{(n-k)v}} \frac{\sum_{m=0}^{b-1} C_m \times s^{nv-1-m}}{\sum_{k=0}^n A_k s^{(n-k)v}}$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{\sum_{k=0}^n A_k s^{(n-k)v}} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sum_{m=1}^b C_m \times s^{nv-1-m}}{\sum_{k=0}^n A_k s^{(n-k)v}} \right]$$

Ejemplo 2.1: La ecuación diferencial fraccionaria:

$$\mathbf{D}_t^{0.2} y = -0.4y$$

$$y(0) = 2$$

se puede resolver aplicando la transformada de Laplace de tal manera que:

$$s^{0.2} y(s) - 2^{0.2-1} = 0.4y(s)$$

$$y(s) = \frac{1}{s^{0.8}} \frac{2}{s^{0.2} + 4}$$

Aplicando la inversa de la transformada:

$$y(t) = ML(t; -0.4, 0.2)$$

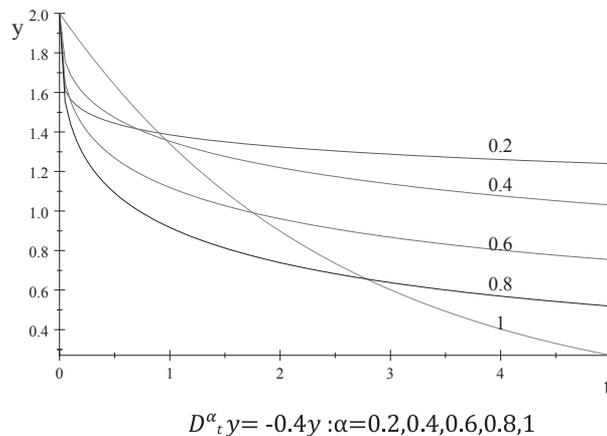
$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-0.4)^n t^{0.2n}}{\Gamma(0.2n+1)}$$

En la Figura 2.6 se muestra la solución de la ecuación diferencial fraccionaria:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha y &= -0.4y \\ y(0) &= 2 \\ \alpha &\leq 1 \end{aligned}$$

donde se ha considerado como parámetro el orden fraccional  $\alpha$  de la ecuación diferencial. En este caso se aprecia que a medida que disminuye el valor del orden de la derivada el valor de  $t$  para el cual se alcanza un valor especificado de  $y$  se incrementa. Este comportamiento ha sido tomado como criterio, entre otros aspectos, para considerar que las ecuaciones diferenciales temporales de orden menor que 1 pueden ser empleadas para modelar los efectos de memoria que se manifiestan en determinados fenómenos. En este caso un valor de  $\alpha=1$  implica la ausencia total de este efecto, mientras que mientras menor es el valor de  $\alpha$  el efecto es más significativo.

Figura 2.6. Solución de una EDF para diferentes valores del orden fraccional de la derivada



Fuente: elaboración propia.

### Métodos numéricos

Se han propuesto diferentes métodos de solución de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, entre los que se pueden mencionar los métodos lineal, cuadrático y cúbico, el esquema directo y la integración en un espacio de fase no entero. En

este texto se explica el método lineal, propuesto por Diethelm, Ford y Freed. La ecuación diferencial fraccionaria para resolver se escribe de la forma:

$$\mathbf{D}_t^\alpha y = f(t, y)$$

$$y_i(0) = y_{0,i} : i = 1, \dots, n-1$$

donde  $f(t, y)$  es una función no lineal. Para encontrar la solución numérica se define el valor máximo  $T$  de la variable independiente  $t$ , y se divide la solución en  $N$  partes, donde el intervalo de tiempo considerado en cada una de las partes está dado por:

$$h = \frac{T}{N}$$

Definiendo:

$$g_j = \sum_{i=0}^{n-1} y_{0,i} \times \frac{(jh)^i}{i!}$$

$$y_j = y(jh)$$

$$F_j = f(jh, y(jh))$$

Se establece entonces:

$$m = 0, \dots, N-1$$

$$y_{m+1} = g_{m+1} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{m+1} a_{j,m+1} F_j$$

donde:

$$a_{j,m+1} = \left\{ \begin{array}{ll} m^{\alpha+1} (m-\alpha) (m+1)^\alpha & \text{si } j = 0 \\ (m-j+2)^{\alpha+1} + 2(m-j)^{\alpha+2} (m-j+1)^{\alpha+1} & \text{si } 0 \leq j \leq m \\ 1 & \text{si } j = m+1 \end{array} \right\}$$

Nótese que el término  $\sum_{j=0}^{m+1} a_{j,m+1} F_j$  involucra a  $y_{m+1}$ , por lo que es necesario resolver el valor de  $y_{m+1}$  correspondiente aplicando un método numérico de iteración, motivado por el carácter no lineal de la ecuación diferencial.

## Ecuaciones diferenciales parciales fraccionarias

La solución exacta de este tipo de ecuaciones generalmente es más complicada de obtener que en el caso de las ecuaciones diferenciales fraccionarias analizadas en la sección anterior. La solución de una ecuación diferencial parcial fraccionaria del tipo:

$$\mathbf{D}_t^\alpha y(x,t) = \lambda \mathbf{D}_x^\beta y(x,t)$$

donde  $\lambda$  es constante puede ser resuelta mediante el método de separación de variables y la aplicación de la transformada de Laplace. Expresando:

$$y(x,t) = g(t)h(x)$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias:

$$\begin{aligned}\lambda \mathbf{D}_x^\beta h(x) &= -C h(x) \\ \mathbf{D}_t^\alpha g(t) &= -C g(t)\end{aligned}$$

donde cada una de estas ecuaciones puede ser resuelta de forma independiente mediante el método de la transformada de Laplace. De esta forma se obtiene:

$$\begin{aligned}H(s_x) &= \frac{\sum_{k=0}^{[\beta]} s^{\beta-1-k} C_k}{(\lambda s^\beta + C)} \\ h(x) &= \mathcal{L}_x^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{[\beta]} \frac{s^{\beta-1-k} C_k}{\lambda (s^\beta + \frac{C}{\lambda})} \right] \\ G(s_t) &= \frac{\sum_{l=0}^{[\alpha]} s^{\alpha-1-l} C_l}{(s^\alpha + C)} \\ g(t) &= \mathcal{L}_t^{-1} \left[ \sum_{l=0}^{[\alpha]} \frac{s^{\alpha-1-l} C_l}{(s^\alpha + C)} \right]\end{aligned}$$

donde los subíndices  $x$  y  $y$  que se han especificado en  $s$  se refieren a la variable independiente que se ha considerado al aplicar la transformada. La solución general de la ecuación diferencial parcial fraccionaria está dada por:

$$y(x,t) = \mathcal{L}_x^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{[\beta]} \frac{s^{\beta-1-k} C_k}{\lambda(s^\beta + \frac{c}{\lambda})} \right] \times \mathcal{L}_t^{-1} \left[ \sum_{l=0}^{[\alpha]} \frac{s^{\alpha-1-l} C_l}{(s^\alpha + C)} \right]$$

donde las constantes de integración  $C_j$  se determinan a partir de las condiciones iniciales y de contorno y el símbolo  $[z]$  representa el mayor número entero que cumple la condición  $[z] < z$ . Cuando la solución involucra una serie se obtienen infinitas soluciones posibles para las condiciones iniciales y de contorno establecidas, lo cual se debe a que se obtienen infinitos valores de las constantes de integración. Este problema, que también suele presentarse cuando en la solución de ecuaciones diferenciales parciales de orden entero se involucran funciones periódicas, se resuelve seleccionando el valor de las constantes de integración que mejor se ajustan a los resultados esperados.

Ejemplo 2.2: La solución de la ecuación diferencial parcial fraccionaria:

$$\mathbf{D}_t^{0,9} y(x,t) = 0.6 \mathbf{D}_x^{2,4} y(x,t)$$

sujeta a las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} m(0,t) &= 0 \\ y(1,t) &= 0 \end{aligned}$$

y la condición inicial:

$$\begin{aligned} 0.6 \mathbf{D}_x^{2,4} y_0(x) &= -4 \\ y_0(1) &= 0 \\ m_0(0) &= 0 \end{aligned}$$

siendo:

$$m(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

puede ser obtenida mediante el método de separación de variables. Expresando:

$$y(x,t) = \mathbf{h}(x) \mathbf{g}(t)$$

se obtienen las ecuaciones diferenciales fraccionarias:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t^{0.9} \mathbf{g}(t) &= -C \mathbf{g}(t) \\ 0.6 \mathbf{D}_x^{2.4} \mathbf{h}(x) &= -C \mathbf{h}(x) \\ \mathbf{g}(s_t) &= \frac{1}{s^{0.1}} \frac{\mathbf{g}_0}{C + s^{0.9}} \end{aligned}$$

donde  $C$ ,  $\mathbf{g}_0$  y  $\mathbf{h}_0$  son las constantes de integración. Aplicando la transformada inversa:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \mathbf{g}_0 \frac{(-C)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n+1)} \\ \mathbf{h}(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \mathbf{h}_0 \frac{\left(-\frac{C}{0.6}\right)^n x^{2.4n}}{\Gamma(2.4n+1)} \end{aligned}$$

obteniéndose la solución general:

$$y(x,t) = C_0 \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-C)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n+1)} \right) \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\left(-\frac{C}{0.6}\right)^n x^{2.4n}}{\Gamma(2.4n+1)} \right)$$

Para evaluar las constantes de integración  $C_0$  y  $C$  se toman en cuenta las condiciones iniciales y de contorno:

$$\begin{aligned} y(1,t) = 0 &= C_0 \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-C)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n+1)} \right) \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\left(-\frac{C}{0.6}\right)^n 1^{2.4n}}{\Gamma(2.4n+1)} \right) \\ y_0(x) &= C_0 \times \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-C)^n (0)^{0.9n}}{\Gamma(0.9n+1)} \right) \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\left(-\frac{C}{0.6}\right)^n x^{2.4n}}{\Gamma(2.4n+1)} \right) \end{aligned}$$

De aquí se obtiene que  $C$  tiene infinitos valores posibles que están dados por las soluciones positivas de  $C$  del polinomio:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\left(-\frac{C}{0.6}\right)^n 1^{2.4n}}{\Gamma(2.4n+1)} = 0$$

mientras que:

$$C_0 = \frac{y_0(x)}{\left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-\frac{C}{0.6})^n x^{2.4n}}{\Gamma(2.4n+1)} \right)}$$

Sustituyendo en la solución:

$$y(x,t) = y_0(x) \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-C)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n+1)} \right)$$

La función  $y_0(x)$  se obtiene resolviendo la ecuación diferencial fraccionaria en  $x$  definida como condición inicial:

$$\begin{aligned} 0.6 \mathbf{D}_x^{2.4} y_0(x) &= -4 \\ y_0(1) &= 0 \\ m_0(0) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el método de la transformada de Laplace se obtiene:

$$\begin{aligned} y_0(s_x) &= \frac{C_0}{s} - \frac{6.6668}{s^{3.4}} \\ y_0(x) &= C_0 + \frac{1}{\Gamma(3.4)} x^{2.4} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta las condiciones de contorno se obtiene:

$$y_0(x) = \frac{1}{\Gamma(3.4)} (1-x^{2.4})$$

de tal forma que:

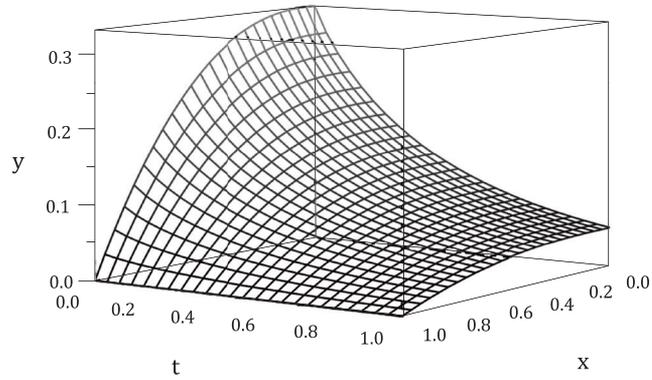
$$y(x,t) = \frac{1}{\Gamma(3.4)} (1-x^{2.4}) \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-C)^n t^{0.9n}}{\Gamma(0.9n+1)} \right)$$

En la Figura 2.7 se muestra el comportamiento de  $y(x, t)$  obtenido considerando el valor mínimo positivo de  $C$  que satisface la ecuación algebraica:

$$\sum_{n=0}^N \frac{\left(-\frac{C}{0.6}\right)^n 1^{2.4n}}{\Gamma(2.4n+1)} = 0$$

$$C=2.057$$

Figura 2.7. Solución de la EDPF dada en el Ejemplo 2.2





# **Ecuaciones constitutivas y fenómenos de transporte**

*Arturo Palacio Pérez*



Los procesos de transferencia de momento, masa y energía se suelen describir a través de ecuaciones diferenciales parciales que tienen como variables independientes al tiempo y a las coordenadas espaciales. Esto se debe a que la existencia de procesos de transporte involucra necesariamente la presencia de gradientes espaciales de velocidad (transporte de momento), temperatura (transporte de energía) y/o concentración, mientras que un estado no estacionario involucra siempre a un gradiente temporal.

Si bien en estado estacionario y en geometrías relativamente simples estas ecuaciones se pueden reducir a ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen soluciones analíticas exactas, esto no ocurre así en el caso no estacionario, donde siempre debe tratarse con una ecuación diferencial parcial espacial-temporal.

Existen, sin embargo, numerosos casos en el campo de la ingeniería en los cuales lo que interesa es el comportamiento dinámico del promedio espacial de la variable, y no el perfil espacial en particular. Por ejemplo, en el transporte industrial de fluidos lo que a menudo importa es el comportamiento temporal de la velocidad promedio o de la temperatura promedio del flujo con respecto a la longitud del tubo cuando hay pérdidas de calor, más que los perfiles de velocidad o temperatura en sí, respectivamente.

Los comportamientos de los promedios espaciales de las variables pueden ser obtenidos integrando los perfiles espaciales y dividiendo por el tamaño del espacio, lo cual requiere de la solución previa de la ecuación diferencial espacial correspondiente, la cual, es una ecuación diferencial parcial en el caso de que existan cambios con respecto al tiempo (estado no estacionario) o cambios simultáneos con respecto a más de una coordenada espacial debido a procesos de transporte por convección. El cálculo diferencial fraccionario puede ser empleado como una herramienta que permita predecir el comportamiento promedio sin necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales parciales. El formalismo a través del cual puede llevarse a cabo esta aproximación se basa en las ecuaciones constitutivas.

Las ecuaciones constitutivas son ecuaciones diferenciales fraccionales que describen el comportamiento del promedio espacial y que consideran en sus parámetros los efectos de los procesos de transporte asociados a los gradientes espaciales que no se toman en cuenta de forma explícita.

En este capítulo se describe el formalismo a través del cual se obtienen las ecuaciones constitutivas, y se presentan varios ejemplos donde se hace uso de este tipo de ecuaciones para la solución de problemas prácticos.

## Obtención de la ecuación constitutiva

El formalismo que se presenta a continuación resulta válido cuando la ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento del sistema está dada por:

$$AD_t y(t,x) = BD_x^2 y(t,x) + g(t)$$

siendo  $A$  y  $B$  son constantes, y lo que interesa obtener es el comportamiento respecto a  $t$  del promedio  $Y_x(t)$ :

$$Y_x(t) = \frac{{}_0^L D_x^{-1} y(t,x)}{{}_0^L D_x^{-1} 1}$$

Para obtener la ecuación constitutiva se aplica la transformada de Laplace a la ecuación (EC 1) considerando como variable independiente a  $t$ , de tal manera que se obtiene la ecuación diferencial no homogénea:

$$Asy(s,x) = BD_x^2 y(s,x) + g(s)$$

donde la ecuación diferencial homogénea correspondiente:

$$Asy(s,x) = BD_x^2 y(s,x)$$

tiene como solución general:

$$y(s,x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{A}{B}}sx} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{A}{B}}sx}$$

Si se considera que para  $t=0$  la solución es finita, es decir:

$$y(0,x) = y_0(x)$$

y se aplica el teorema del valor inicial de la transformada:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s C_1 e^{\sqrt{\frac{A}{B}}sx} \rightarrow \infty : C_1 = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s C_2 e^{-\sqrt{\frac{A}{B}}sx} = 0 : C_2 \neq 0$$

entonces:

$$y(s,x) = C_2 e^{-\sqrt{\frac{A}{B}}sx}$$

Derivando la función (EC 1A) respecto a  $x$ :

$$\mathbf{D}_x^1 \left[ C_2 e^{-\sqrt{\frac{A}{B}}sx} \right] = -\sqrt{\frac{A}{B}} s C_2 e^{-\frac{1}{B}x\sqrt{AB}s}$$

y combinando apropiadamente las ecuaciones (EC 1A) y (EC 1B):

$$\mathbf{D}_x^1 y(s,x) = -\sqrt{\frac{A}{B}} \sqrt{s} y(s,x)$$

Sustituyendo (EC 1C) en (EC 1D)

$$Asy(s,x) = -\sqrt{AB} \sqrt{s} \mathbf{D}_x^1 y(s,x) + g(s)$$

Si se considera la definición de la transformada del promedio  $Y_x(s)$  y que el operador diferencial fraccionario conmuta:

$$As \frac{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} y(s,x)}{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} 1} = -\sqrt{AB} \sqrt{s} \frac{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} y(s,x)}{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} 1} + \frac{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} g(s)}{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} 1}$$

y se considera que:

$$\mathbf{D}_x^1 \frac{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} y(s,x)}{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} 1} = \frac{Y_x(s)}{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} 1}$$

entonces:

$$AsY_x(s) = -\sqrt{AB} \sqrt{s} \frac{Y_x(s)}{{}_0^L \mathbf{D}_x^{-1} 1} + g(s)$$

Aplicando la transformada inversa se obtiene la ecuación diferencial constitutiva:

$$A \mathbf{D}_t Y(t) + \sqrt{\frac{AB}{S}} \mathbf{D}_t^{0.5} Y(t) = g(t)$$

$$Y(0) = Y_0$$

donde  $S$  involucra al intervalo de valores de  $x$  que definen al sistema:

$$S=(t_0 D_x^{-1} 1)^2=L^2$$

En las secciones siguientes se muestran algunos ejemplos relacionados con procesos de transporte que se resuelven mediante el uso de ecuaciones constitutivas.

### Variación temporal del flujo

El problema para resolver consiste en determinar el comportamiento no estacionario del flujo laminar en un tubo de un fluido incompresible y newtoniano. Se asume que la variación temporal del flujo es causada por una variación temporal en la fuerza directora, en este caso del gradiente de presión, y se atribuye a cambios en la operación de bombeo del flujo. La ecuación diferencial que describe el comportamiento de este sistema, expresada en coordenadas cilíndricas, está dada por:

$$\rho \frac{\partial v(t,r)}{\partial t} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v(t,r)}{\partial r} \right) + \frac{\Delta P}{L}$$

donde  $v \left( \frac{m}{s} \right)$  es la velocidad del flujo,  $t$  (s) es el tiempo,  $r$  (m) es la coordenada radial,  $\rho \left( \frac{kg}{m^3} \right)$  y  $\mu$  (Pa s) son la densidad y viscosidad del fluido, respectivamente,  $L$  (m) es la longitud total del tubo y  $\Delta P$  (Pa) representa la diferencia de presión entre la entrada y la salida. Las condiciones iniciales y de contorno están dadas por:

$$\begin{aligned} v(t,0) &= \text{finita} \\ v(t,R) &= 0 \\ v(t,r) &= v_0(r) \end{aligned}$$

donde  $R$  (m) es el radio del tubo. La variación en la fuerza directora se describe a través de una función finita que depende del tiempo:

$$\frac{\Delta P}{L} = h(t)$$

y que debe ser finita para tiempo igual a cero e infinito, respectivamente, de tal manera que:

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{\Delta P_1}{L} \\ h(\infty) &= \frac{\Delta P_2}{L} \end{aligned}$$

Las velocidades promedio  $V_1$  y  $V_2$  correspondientes a  $t=0$  y  $t=\infty$ , respectivamente, se obtienen a través de la solución de la ecuación diferencial:

$$0 = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v(r)}{\partial r} \right) + \frac{\Delta P_{1,2}}{L}$$

para la cual se obtiene como solución:

$$v_{1,2}(r) = \frac{\Delta P_{1,2}}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Integrando con respecto al área de flujo para obtener el valor promedio:

$$\begin{aligned} V_{1,2} &= \frac{\Delta P_{1,2}}{L} \frac{1}{4\mu} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta} \\ &= \frac{1}{8} \frac{R^2}{\mu} \frac{\Delta P_{1,2}}{L} \end{aligned}$$

La ecuación constitutiva que describe el comportamiento de la velocidad promedio está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t V(t) + \sqrt{\frac{\mu}{\rho R^2}} \mathbf{D}_t^{0.5} V(t) &= \frac{1}{\rho} h(t) \\ V(0) &= \frac{1}{8} \frac{R^2}{\mu} \frac{\Delta P_1}{L} \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación se toma en cuenta la propiedad de linealidad de los operadores diferenciales y se definen las funciones:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= V(t) - \frac{1}{8} \frac{R^2}{\mu} \frac{\Delta P_2}{L} \\ w(t) &= \frac{1}{\rho} \left( h(t) - \frac{\Delta P_2}{L} \right) \end{aligned}$$

de tal manera que se obtiene la ecuación diferencial fraccionaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t \phi(t) + \sqrt{\frac{\mu}{\rho R^2}} \mathbf{D}_t^{0.5} \phi(t) &= w(t) \\ \phi(0) &= \frac{1}{8} \frac{R^2}{\mu L} (\Delta P_1 - \Delta P_2) \end{aligned}$$

cuya solución expresada en transformada de Laplace es:

$$\phi(s) = \frac{w(s)}{s^{0.5}(s^{0.5} + k)} + \frac{\phi(0)}{s^{0.5}(s^{0.5} + k)}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \phi(0) \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_0}}\right)\right) \\ & + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{w(s)}{s^{0.5}\left(s^{0.5} + \sqrt{\frac{1}{\tau_0}}\right)} \right] \end{aligned}$$

y sustituyendo  $\phi(t)$  apropiadamente se obtiene el comportamiento temporal de la velocidad promedio:

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{\tau_0}{8\pi} \frac{(\Delta P_1 - \Delta P_2)}{\rho L} \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_0}}\right)\right) \\ & + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{w(s)}{s^{0.5}\left(s^{0.5} + \sqrt{\frac{1}{\tau_0}}\right)} \right] + \frac{\tau_0}{8\pi} \frac{\Delta P_2}{\rho L} \end{aligned}$$

donde  $\tau_0$  es la constante de tiempo asociada al comportamiento temporal del flujo debido a los efectos viscosos, y está definida como:

$$\tau_0 = \frac{\rho R^2}{\mu} s$$

y  $w(s)$  es la transformada de Laplace asociada a la perturbación en la diferencia de presión:

$$w(s) = \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\rho} \left( h(t) - \frac{\Delta P_2}{L} \right) \right]$$

El comportamiento temporal del flujo se determina considerando que este es igual al producto de la velocidad promedio y el área de flujo:

$$Q(t) = \pi R^2 V(t)$$

La ecuación general (velocidad) permite estimar el comportamiento de la velocidad del fluido para una perturbación arbitraria finita en la fuerza directora. A continuación, se presentan las soluciones para perturbaciones tipo salto escalón y exponencial.

### **Cambio salto escalón en el gradiente de presión**

Para una perturbación tipo salto escalón en el gradiente de presión del tipo:

$$h(0) = 0$$

$$h(t) = \frac{\Delta P_2}{L} : t > 0$$

se obtiene que:

$$\frac{1}{\rho} \left( h(t) - \frac{\Delta P_2}{L} \right) = 0$$

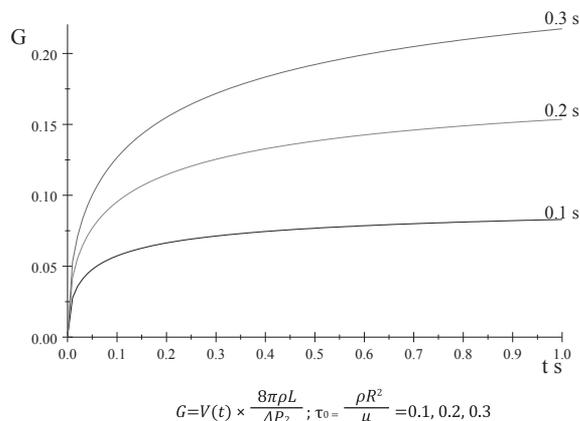
y el comportamiento predicho de la velocidad promedio es:

$$V(t) = \frac{\tau_0}{8\pi} \frac{\Delta P_2}{\rho L} \left( 1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_0}}\right) \right) \right)$$

El parámetro  $\tau_0$  [s] expresa el efecto del transporte de momento y del perfil de velocidad sobre la dinámica del flujo, y depende de las propiedades del fluido y del área de flujo. Nótese que esta constante es directamente proporcional al área y la densidad, e inversamente proporcional a la viscosidad. Por otra parte,  $\tau_0$  representa la constante de tiempo que cuantifica el tiempo requerido para que el flujo alcance el estado estacionario final, de tal forma que:

$$V(\tau_0) = 0.57 \times (V(\infty) - V(0))$$

Figura 3.1. Comportamiento dinámico de la velocidad promedio ante un cambio salto escalón en el gradiente de presión



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 3.1 se muestra el comportamiento temporal de diferentes fluidos de igual densidad, que se transportan a través de tubos de dimensiones iguales y que se encuentran sometidos al mismo gradiente de presión, donde se ha considerado como parámetro a  $\tau_0$ . En este caso se puede apreciar cómo a medida que disminuye la viscosidad se incrementa el valor del flujo para un mismo valor de tiempo, a la vez que se incrementa el tiempo para alcanzar el estado estacionario final.

### Cambio exponencial en el gradiente de presión

Para una perturbación exponencial en el gradiente de presión:

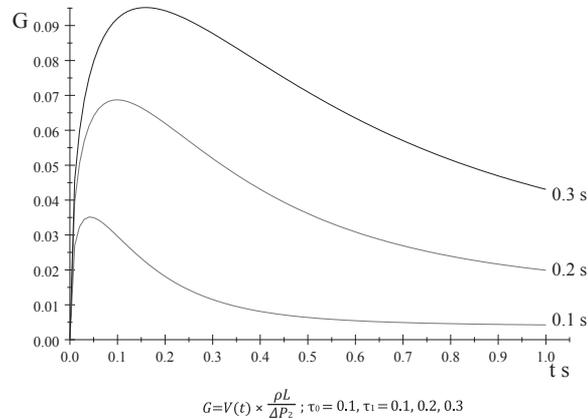
$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{\Delta P_2}{L} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right)$$

donde  $\tau_1$  [s] es la constante de tiempo asociada al cambio exponencial en el gradiente de presión. En este caso se obtiene como solución:

$$\begin{aligned}
 V(t) = & \frac{\tau_0}{8\pi} \frac{\Delta P_2}{\rho L} \left( 1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_0}}\right) \right) \right) \\
 & - \frac{\tau_0}{\rho} \frac{\Delta P_2}{L} \left( \frac{\tau_1}{\tau_0 + \tau_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \left( \sqrt{-\frac{t_1}{\tau_0}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{t}{\tau_1}}\right) - 1 \right) \right) \\
 & - \frac{\tau_0}{\rho} \frac{\Delta P_2}{L} \left( \frac{\tau_1}{\tau_0 + \tau_1} \exp\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau_0}}\right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

En la Figura 3.2 se muestra el comportamiento de la velocidad de un fluido considerando  $\tau_0=0.1s$  y un mismo valor del gradiente final de presión, pero diferentes valores de la constante de tiempo  $\tau_1$  asociados al cambio exponencial del gradiente. Nótese que la inclusión de una constante de tiempo adicional en el sistema involucra la aparición de un sobredisparo (valor máximo) en la respuesta. En este caso se aprecia que el valor del sobredisparo y el tiempo para alcanzar el estado estacionario se incrementan con la constante de tiempo  $\tau_1$  asociada a la perturbación.

Figura 3.2. Comportamiento temporal de la velocidad ante una perturbación exponencial en el gradiente de presión



Fuente: elaboración propia.

### Variación temporal de las pérdidas de presión por fricción

En la sección anterior se analizó cómo se comporta la velocidad del flujo cuando se produce una perturbación en el gradiente de presión, mientras que esta sección trata de cómo se comporta temporalmente la pérdida de presión por fricción cuando existe una variación temporal en la velocidad del fluido causada por un efecto externo al sistema considerado. Este cambio en el flujo se genera cuando se produce una inyección de este fluido o una extracción del mismo. En cualquiera de los casos el cambio en la velocidad promedio del fluido se supone que tiene lugar de forma exponencial, de tal manera que:

$$V(t) = \Phi \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right) + V_1$$

donde la velocidad y el gradiente de presión para  $t=\infty$  están dados por:

$$V_2 = \Phi + V_1$$

$$\frac{\Delta P_2}{L} = \frac{8\mu}{R^2} (\Phi + V_1)$$

y la ecuación constitutiva correspondiente es la ec. (ec consti 1):

$$\frac{1}{\rho} h(t) = \mathbf{D}_t V(t) + \sqrt{\frac{1}{\tau_0}} \mathbf{D}_t^{0.5} V(t)$$

$$h(t) = \frac{\Delta P}{L}$$

Definiendo las variables de desviación:

$$\phi(t) = V(t) - V(\infty)$$

$$g(t) = \frac{1}{\rho} \left( h(t) - \frac{\Delta P_\infty}{L} \right)$$

y sustituyendo apropiadamente:

$$g(t) = D_t \phi(t) + \sqrt{\frac{1}{\tau_0}} D_t^{0.5} \phi(t)$$

A partir de las definiciones establecidas se tiene que  $\phi(t)$  es una función conocida, la cual está dada por:

$$\phi(t) = -\Phi \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)$$

de tal manera que:

$$g(t) = -\Phi \mathbf{D}_t \left[ \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right] - \Phi \sqrt{\frac{1}{\tau_0}} \mathbf{D}_t^{0.5} \left[ \left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right]$$

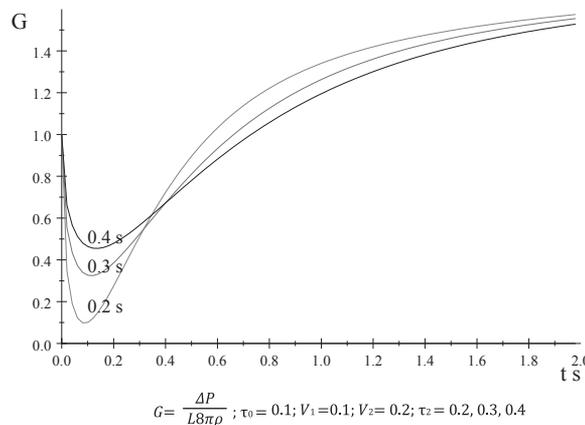
$$g(t) = \Phi \frac{1}{\tau_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) - \Phi \sqrt{\frac{1}{\tau_0}} C_0 \left( \sqrt{-\frac{1}{\tau_2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{erf} \left( \sqrt{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$$

donde la constante  $C_0$  se evalúa a partir de las condiciones iniciales, obteniéndose finalmente:

$$\frac{\Delta P}{L} = V_1 \frac{8\pi\rho}{\tau_0} \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) - \left( \sqrt{-\frac{1}{\tau_2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{t}{\tau_2}}\right) \right) \right) + V_2 \frac{8\pi\rho}{\tau_0} \left( 1 - \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) - \left( \sqrt{-\frac{1}{\tau_2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{-\frac{t}{\tau_2}}\right) \right) \right) \right)$$

En la Figura 3.3 se muestra el comportamiento temporal del gradiente de presión generado por las fuerzas de fricción viscosas tomando como parámetro el valor de la constante de tiempo  $\tau_2 s$  asociada a la perturbación exponencial del flujo y considerando  $V_1=0.1 \frac{m}{s}$ ,  $V_2=0.2$  y  $\frac{m}{s}$  y  $\tau_0=0.1s$ . En este caso se aprecia la presencia de un sobredisparo, cuyo valor se incrementa cuando disminuye el valor de  $\tau_2$  y que el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario se incrementa con el valor de  $\tau_2$ .

Figura 3.3. Comportamiento temporal del gradiente de presión ante un cambio exponencial del flujo



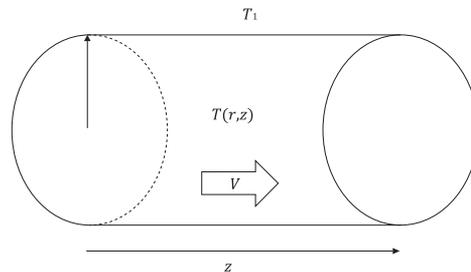
Fuente: elaboración propia.

## Pérdidas de calor en flujos estacionarios

Un problema muy frecuente que se presenta a nivel industrial se relaciona con las pérdidas de calor que se producen cuando un fluido se transporta en estado estacionario a través de un tubo de radio  $R$  a una temperatura diferente a la temperatura ambiente  $T_1$ , la cual se supone constante, tal y como se muestra en

la Figura 3.4 Debido a esta diferencia de temperatura se produce un transporte de calor por conducción con respecto al radio del tubo, a la vez que el calor se transporta por convección a lo largo de la longitud del tubo debido al movimiento del fluido. La existencia de dos mecanismos de transporte de forma simultánea causa que la temperatura en el seno del fluido cambie no solo con respecto a la coordenada  $r$ , sino también con respecto a la coordenada  $z$ , de tal manera que para una distancia lo suficientemente grande con respecto al punto de entrada la temperatura del fluido es prácticamente igual a la temperatura ambiente.

Figura 3.4. Fluido que se transporta en un tubo a temperatura diferente al ambiente causando un transporte de calor



Fuente: elaboración propia.

En ocasiones lo que interesa es encontrar el comportamiento de la temperatura con respecto a la longitud del tubo, y no el perfil de temperatura en detalle. En principio, este comportamiento puede ser estimado a través de un balance macroscópico de energía en el sistema, pero este enfoque no toma en cuenta el efecto del transporte por conducción. Sin embargo, esta limitación puede ser superada a través del empleo de la ecuación constitutiva correspondiente a este sistema.

La ecuación diferencial parcial que describe el comportamiento de la temperatura está dada por:

$$\rho C_p V \frac{\partial T(z,r)}{\partial z} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial T(z,r)}{\partial r} \right) + U(T_1 - T_z)$$

donde  $k \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{s m K}} \right]$  es el coeficiente de conductividad térmica del fluido,  $V \frac{m}{s}$  es la velocidad promedio del flujo,  $U_0 \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{K s m}^2} \right]$  depende del coeficiente de conductividad térmica  $k_p$  y del espesor  $\delta$  de la pared del tubo, respectivamente:

$$U_0 = \frac{k_p}{\delta^2}$$

$\rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$  y  $C_p \left[ \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}} \right]$  son la densidad y la capacidad calorífica del fluido, respectivamente, y  $T_1$  [K] es la temperatura ambiente, la cual se considera constante. En este caso se supone que la viscosidad, densidad y conductividad térmica del fluido son constantes.

La ecuación constitutiva correspondiente a este sistema está dada por la ecuación diferencial fraccionaria espacial:

$$\mathbf{D}_z T_z + \sqrt{\alpha_0} \mathbf{D}_z^{0.5} T_z = q(T_1 - T_z)$$

$$T_{z=0} = T_0$$

donde  $T_z$  es la temperatura promedio del fluido con respecto al área de flujo y los parámetros  $\alpha_0$  y  $q_0$  se relacionan con el efecto de la conductividad térmica del fluido y de la pared del tubo, respectivamente, sobre el comportamiento de la temperatura promedio, y están dados por:

$$\alpha_0 = \frac{k}{\rho C_p V R^2} m^{-1}$$

$$q_0 = \frac{U_0}{\rho C_p V} m^{-1}$$

Para resolver la ecuación constitutiva se define como variable de desviación:

$$\phi(z) = (T_z - T_1)$$

de tal forma que esta se reescribe como:

$$\mathbf{D}_z \phi(z) + \sqrt{\alpha_0} \mathbf{D}_z^{0.5} \phi(z) = q_0 \phi(z)$$

$$\phi(z) = \phi_0$$

Considerando a  $z$  como la variable independiente y aplicando la transformada de Laplace se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{\phi_0}{s + \sqrt{\alpha_0} s^{0.5} + q_0} \\ &= \frac{\phi_0}{(s^{0.5} + \alpha_1)(s^{0.5} + \alpha_2)} \\ &= \frac{\phi_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1}{(s^{0.5} + \alpha_2)} - \frac{\phi_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{1}{(s^{0.5} + \alpha_1)} \end{aligned}$$

donde:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_0} - \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_0 - 4q_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_0} + \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_0 - 4q_0}$$

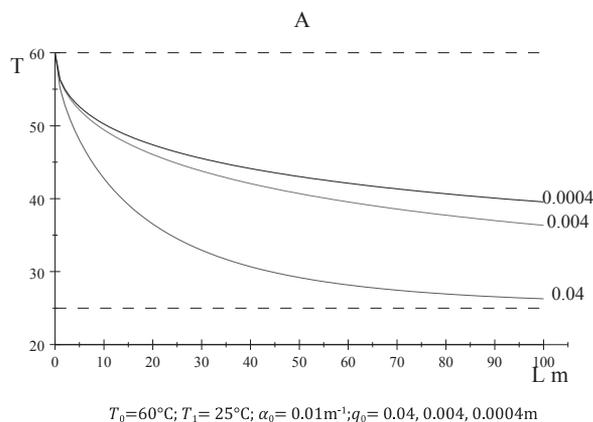
Aplicando la transformada inversa y sustituyendo la variable de desviación se obtiene la ecuación que predice el comportamiento de la temperatura promedio del flujo con respecto a la longitud del tubo:

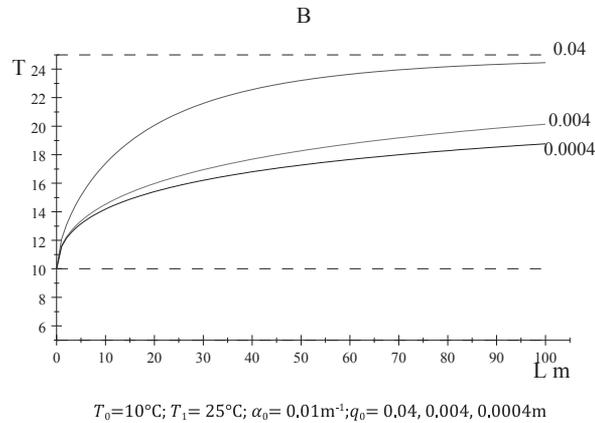
$$T_z = \frac{\alpha_1(T_0 - T_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} (\exp(\alpha_1^2 z) (1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 z^{0.5})))$$

$$- \frac{\alpha_2(T_0 - T_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} (\exp(\alpha_2^2 z) (1 - \operatorname{erf}(\alpha_2 z^{0.5})))$$

En la Figura 3.5 se muestran los comportamientos predichos de la temperatura  $T_z$  (°C) con respecto a  $z$  considerando como parámetro a  $q_0$  para el mismo valor de  $\alpha_0$  considerando A: la temperatura del fluido a la entrada del tubo es mayor que la temperatura ambiente, de tal manera que se produce una pérdida de calor y B: la temperatura del fluido es menor que la temperatura ambiente, de tal manera que el fluido absorbe calor.

Figura 3.5. Efecto de la pared del tubo sobre el calor intercambiado entre el fluido y el ambiente





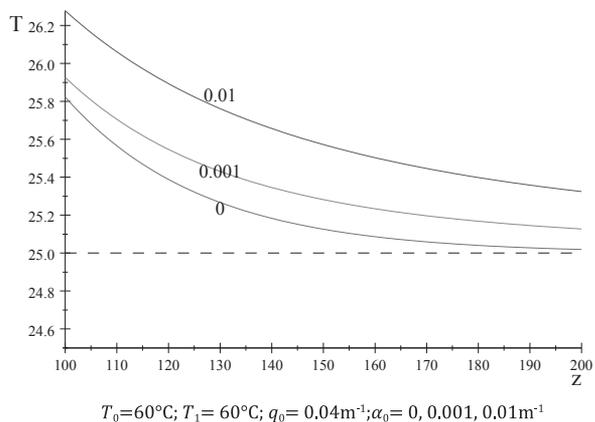
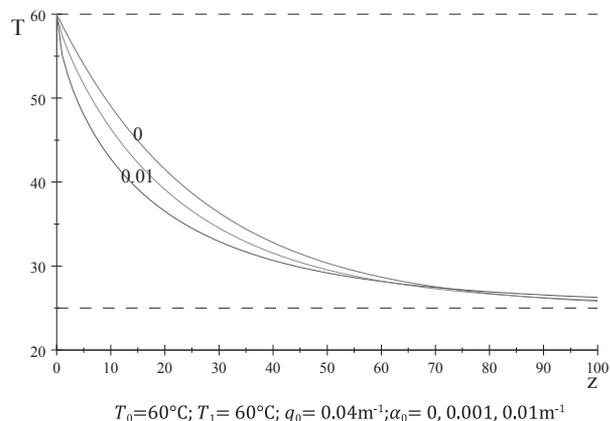
Fuente: elaboración propia.

El parámetro  $q_0$  se relaciona con las pérdidas de calor a través de la pared del tubo, siendo proporcional a la conductividad térmica de la pared del tubo e inversamente proporcional al cuadrado del espesor de esta.

Nótese que una disminución de este parámetro causa un incremento de la distancia requerida para que la temperatura del fluido sea igual a la temperatura ambiente, lo que significa menores pérdidas de calor (caso A) o menor cantidad de calor absorbido (caso B), por lo que los resultados predichos se corresponden con los resultados esperados.

En la Figura 3.6 se muestra el comportamiento de la temperatura para diferentes valores del parámetro  $\alpha_0$ , el cual toma en cuenta el efecto de la conductividad térmica del fluido y del perfil de temperatura sobre el calor intercambiado. En los puntos próximos a la entrada del tubo, cuando las diferencias de temperatura entre el fluido y el ambiente son altas, el incremento de este parámetro causa que las pérdidas de calor se incrementen, lo cual es un indicativo de que el transporte de calor debido al mecanismo molecular (conducción de calor en el seno del fluido) es importante. Sin embargo, a distancias alejadas del punto de entrada, cuando las diferencias de temperatura son menores, las pérdidas de calor disminuyen, ya que se incrementa la distancia requerida para que el fluido alcance la temperatura ambiente.

Figura 3.6. Efecto del transporte por conducción en el fluido sobre el calor intercambiado con el ambiente



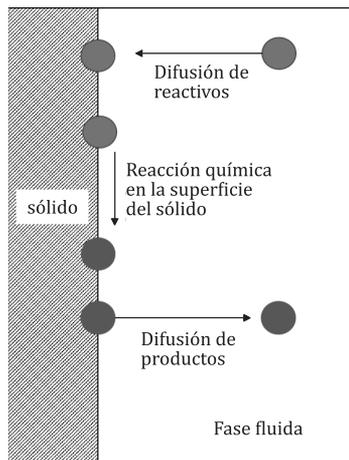
Fuente: elaboración propia.

### Reacción química con difusión

El estudio de la cinética de reacciones químicas en sistemas homogéneos involucra solo al tiempo, ya que usualmente se puede considerar que la concentración de reactivos y productos es la misma en todo el volumen del sistema. Sin embargo, esto no ocurre así en los sistemas heterogéneos, como sucede cuando uno de los reactivos es un sólido o este último actúa como un catalizador, de tal manera que la reacción ocurre en la superficie del sólido. En estos casos hay que distinguir entre la velocidad de reacción química real, que generalmente no puede ser observada de forma directa, y la velocidad aparente de la reacción, que tiene que ver con el comportamiento de la concentración de reactivos y productos en la fase fluida. Esta distinción entre la

velocidad real y la velocidad aparente se debe a que en los sistemas heterogéneos es necesario considerar el efecto de los procesos de transporte de masa que tienen lugar entre el seno de la fase fluida y la superficie del sólido, como se ilustra en la Figura 3.7.

Figura 3.7. Reacción química en sistemas heterogéneos



Fuente: elaboración propia.

Si se supone que: i) la cinética de la reacción se describe a través del comportamiento temporal de uno de los reactivos en la fase fluida; ii) la cinética real es de primer orden y iii) el gradiente de concentración generado por la ocurrencia de la reacción causa que la difusión ocurra en la dirección perpendicular a la superficie del sólido, entonces el comportamiento de la concentración del reactivo se describe a través de la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - kC$$

donde  $k$  [ $s^{-1}$ ] es la constante de velocidad de reacción y  $c$  es la fracción molar del reactivo y  $D$  [ $\frac{m^2}{s}$ ] es el coeficiente de difusión. La velocidad aparente de la reacción, la cual se refiere al comportamiento de la concentración promedio  $C$  del reactivo con respecto al tiempo puede entonces ser determinada a través de la solución de la ecuación constitutiva correspondiente, que está dada por:

$$\begin{aligned} D \frac{dC(t)}{dt} + \sqrt{hD} C(t) &= -kC(t) \\ C(0) &= C_0 \\ h &= \frac{D}{L^2} s^{-1} \end{aligned}$$

donde  $L$  es la longitud característica de la fase fluida paralela a la dirección en la cual ocurre la difusión, es decir, perpendicular a la superficie del sólido. La solución de la ecuación constitutiva es:

$$C(t) = \frac{\alpha_1 C_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)} (\exp(\alpha_1^2 t) (1 - \operatorname{erf}(\alpha_1 t^{0.5}))) - \frac{\alpha_2 C_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)} (\exp(\alpha_2^2 t) (1 - \operatorname{erf}(\alpha_2 t^{0.5})))$$

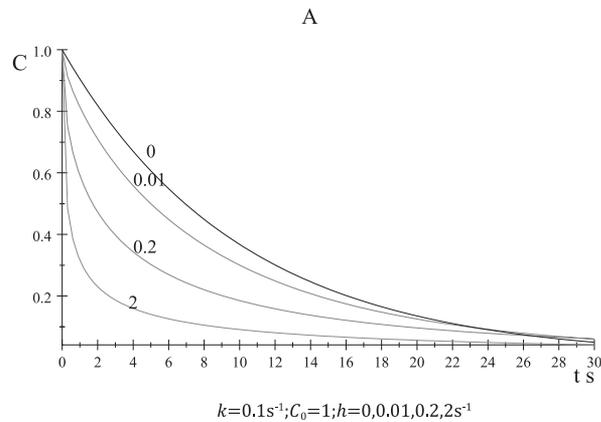
donde:

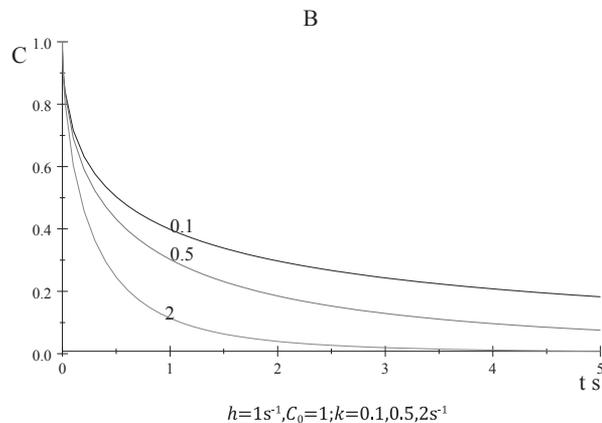
$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{h} - \frac{1}{2} \sqrt{h - 4k}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \sqrt{h} + \frac{1}{2} \sqrt{h - 4k}$$

En la Figura 3.8 se muestra el comportamiento de la concentración con respecto al tiempo para caso A: Considerando como parámetro el efecto de la difusión; y caso B: considerando como parámetro el efecto de la reacción química.

Figura 3.8. Efecto combinado de la reacción química y difusión en sistemas heterogéneos





Fuente: elaboración propia.

Nótese que la velocidad aparente de la reacción se incrementa con el aumento de ambos parámetros, y que el efecto de la difusión causa que el comportamiento temporal de la concentración de reactivo, aunque obviamente es decreciente, no se ajusta a un comportamiento exponencial como el que se debe esperar para el caso de una reacción de primer orden.

Los estudios cinéticos siempre deben llevarse a cabo de forma experimental, ya que es muy difícil establecer *a priori* el mecanismo de reacción involucrado, aspecto que se dificulta aún más en el caso de las reacciones que tienen lugar en la superficie de los sólidos. El uso del modelo dado por la ecuación (EC reacción y difusión) conlleva a realizar ajustes estadísticos no lineales del mismo a los datos experimentales observados, lo cual constituye una limitación importante del mismo, además de las que se derivan debido a las suposiciones que fueron establecidas.



# Turbulencia

*Alejandro Rodríguez Valdés*

*Arturo Palacio Pérez*



El paradigma actual de la ingeniería se basa en el empleo de modelos matemáticos basados en las leyes fenomenológicas de conservación para describir los fenómenos físicos y químicos que ocurren en los procesos industriales, lo cual permite refinar los métodos de diseño y evaluación de los equipos. A pesar del éxito alcanzado en esta temática, que ha dado pie al surgimiento de nuevas líneas de investigación como la Dinámica Computacional de Fluidos, existen todavía fenómenos que no han podido modelarse con exactitud debido, por una parte, a la complejidad involucrada en los procesos que ocurren, mientras que por otra parte no se conoce exactamente los principios físicos básicos que causan a estos comportamientos complejos.

En este contexto destaca el problema de la modelación del movimiento de los fluidos, que se describe a través de la ecuación de Navier Stokes. Esta es una ecuación diferencial parcial espacial - temporal, donde la variable dependiente, en este caso la velocidad del fluido, es un vector de tres componentes y su deducción se basa en la aplicación de las leyes de conservación del momento en un volumen diferencial del fluido.

Uno de los problemas matemáticos pendientes hasta la actualidad consiste en la obtención de una solución general de esta ecuación que sea aplicable a todos los casos que se pueden presentar. En su defecto, la ecuación original se simplifica tomando en cuenta las características del sistema y los gradientes de velocidad más importantes, con el propósito de obtener una ecuación diferencial parcial más simple que pueda resolverse de forma analítica. No obstante, aún en los casos más simples, la ecuación de Navier Stokes, por sí sola, no permite predecir el comportamiento del cambio de régimen de flujo que ocurre cuando la velocidad del fluido alcanza un determinado valor máximo, ni el comportamiento analítico del perfil de velocidad bajo condiciones de turbulencia. En este sentido, existen cuatro puntos de vista fundamentales para modelar la turbulencia: i) el determinista clásico; ii) el empírico; iii) el estocástico y iv) el basado en la teoría de la complejidad.

## Enfoque determinista

La ecuación de Navier Stokes, que es válida para un fluido con densidad  $\rho$  y viscosidad constante, está dada por:

$$\rho \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} = \mu \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \nabla P + \rho \mathbf{g}$$

donde la velocidad es un vector de tres componentes  $\tilde{\mathbf{v}} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $t$  es el tiempo,  $P$  es la presión,  $\mathbf{g}$  es el producto de la aceleración de la gravedad y la diferencia de altura. Si se definen las variables no dimensionales:

$$v = \frac{\tilde{v}}{V}; \tau = t \frac{V}{L}; \Lambda = \frac{P}{\rho V^2}$$

entonces la se obtiene la ecuación no dimensional:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \cdot \nabla v = \frac{1}{\mathbf{R}_e} \nabla^2 v + \nabla \Lambda$$

en la cual el parámetro  $R_e$  es el número de Reynolds, definido como:

$$\mathbf{R}_e = \frac{\rho V L}{\mu}$$

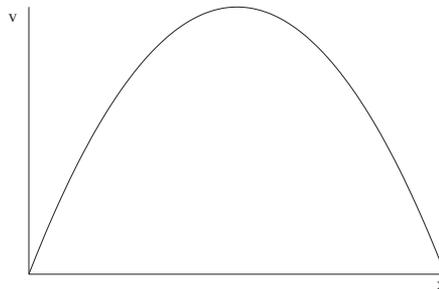
y donde  $\mathcal{V} \left[ \frac{m}{s} \right]$  es la velocidad promedio del flujo, igual al flujo volumétrico  $Q \left[ \frac{m^3}{s} \right]$  dividido por el área  $A [m^2]$  de la sección perpendicular al movimiento del fluido y  $L$  es una longitud característica del sistema, la cual se toma en cuenta además para expresar las distancias espaciales  $x, y, z$  de forma no dimensional:

$$l_x = \frac{x}{L}; l_y = \frac{y}{L}; l_z = \frac{z}{L}$$

El número de Reynolds es un parámetro no dimensional que cuantifica la relación entre las fuerzas inerciales y viscosas, y juega un importante papel en la estimación del régimen de flujo, como se expondrá más adelante.

Normalmente la ecuación se simplifica considerando solamente el componente de la velocidad correspondiente al eje paralelo a la dirección del movimiento del fluido, y haciendo igual a cero el resto de los componentes. Bajo esta suposición, en estado estacionario y para geometrías relativamente simples se llega a una ecuación diferencial ordinaria cuya solución analítica predice un perfil de velocidad estable y organizado. Esta solución es correcta para el caso del régimen laminar de flujo, cuando las capas de flujo no se mezclan entre sí, como se muestra en la Figura 4.1.

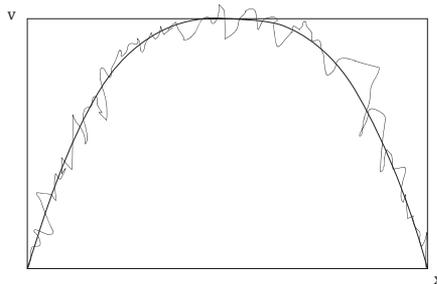
Figura 4.1. Comportamiento de la velocidad en régimen laminar



Fuente: elaboración propia.

El valor de  $R_e$  se incrementa con la velocidad promedio, hasta alcanzar un determinado valor máximo, a partir del cual las capas de flujo se mezclan entre sí, y la velocidad puntual muestra un comportamiento impredecible que cambia con el tiempo, aun cuando el sistema se encuentre en estado estacionario, lo que se conoce como régimen turbulento (Figura 4.2). Este comportamiento impredecible, que no es predicho por la solución analítica exacta, se genera debido a que las capas de flujo se mezclan entre sí, lo que en principio se puede explicar debido a que, bajo estas condiciones, los componentes del vector que en el caso laminar fueron considerados igual a cero no pueden esta vez ser despreciados. El problema aquí es que no se ha encontrado una forma de modelar esta dependencia del valor de los componentes de la velocidad con respecto al número de Reynolds, mientras que, suponiendo que esta dependencia sea encontrada, esto llevaría a resolver una ecuación cuya solución analítica no ha podido hallar. Todas estas limitaciones evidencian que el enfoque determinista clásico es actualmente completamente inapropiado para resolver el problema de la turbulencia.

Figura 4.2. Comportamiento de la velocidad en régimen turbulento



Fuente: elaboración propia.

### Solución empírica

La revolución industrial implicó, entre otras cosas, la implementación de procesos que operan de forma continua en los cuales el transporte de fluidos a través de tubos juega un papel fundamental. En estos casos lo común es que los fluidos se transportan en el régimen turbulento, siendo la excepción (por cierto, no deseada) el transporte en régimen laminar. Esto conllevó a la necesidad de disponer de ecuaciones que permitan calcular la potencia de bombeo requerida como una función de las dimensiones del proceso, el flujo requerido y las propiedades físicas del fluido. En principio estos aspectos pueden ser resueltos de forma analítica si se dispone del perfil de velocidad en el tubo, lo cual implica disponer de una solución de la ecuación de conservación del momento en régimen turbulento, aspecto que, como se discutió en la sección anterior, no se puede resolver a través del enfoque determinista.

Este problema práctico fue resuelto a principios del siglo XX a través del enfoque empírico, basado en las observaciones experimentales y en el uso de la estadística del comportamiento de la velocidad promedio del flujo, sin necesidad de considerar el perfil de velocidad.

Para esto se toma en cuenta que el rozamiento que se produce entre las capas de flujo y entre el flujo y la pared del tubo, respectivamente, causa una pérdida de energía, conocida como disipación viscosa o pérdida de presión por fricción, que debe ser contrarrestada a través de la imposición de un trabajo externo sobre el sistema (en este caso el empleo de un equipo de bombeo). Este fenómeno se manifiesta en que el flujo siempre tiene lugar desde las regiones de mayor energía (mayor altura o presión) a las regiones de menor energía. Se ha obtenido teóricamente, y corroborado experimentalmente, que en régimen laminar las pérdidas de presión por fricción se incrementan linealmente con la velocidad promedio del fluido, encontrándose que:

$$\begin{aligned}\Delta P &= 8 \frac{L}{R^2} V \mu \\ &= 32 \frac{V \mu L}{D^2}\end{aligned}$$

donde  $L$  ( $m$ ) es la longitud total del tubo y  $D$  ( $m$ ) es el diámetro del tubo.

En régimen turbulento se mezclan las capas de flujo, y eventualmente se generan patrones complejos, como vórtices y remolinos, cuya formación y mantenimiento conllevan a una disipación adicional de la energía, lo que se manifiesta en un incremento de las pérdidas de presión por fricción y en un comportamiento no lineal de  $\Delta P$  con respecto a  $V$  que depende del valor del número de Reynolds. En este sentido, las pérdidas de presión se determinan a través de la relación:

$$\begin{aligned}\Delta P &= f \times \frac{1}{2} \rho V^2 \left( \frac{L}{D} \right) \\ D &= 2R\end{aligned}$$

donde  $f$  es el factor de fricción que depende de  $R_e$ , que para flujos en tubos está dado por:

$$R_e = \frac{DV\rho}{\mu}$$

donde:

$$\begin{aligned}R_e < 2100: & \text{régimen laminar} \\ R_e > 2100: & \text{régimen turbulento}\end{aligned}$$

Nótese que para régimen laminar el factor de fricción está dado por:

$$f = \frac{64}{R_e}$$

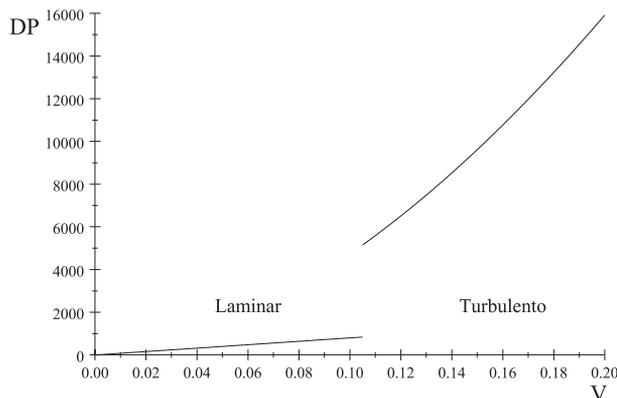
La relación entre  $f$  y  $R_e$  se estableció de forma experimental, existiendo diferentes modelos estadísticos que describen este comportamiento, algunos de los cuales se muestran en la Tabla 4.1 En la Figura 4.3 se muestra el comportamiento de las pérdidas de presión por fricción con respecto a la velocidad promedio del fluido para el agua fluyendo en un tubo de radio igual a 0.01 m y longitud 100 m. Nótese que la transición de flujo laminar a flujo turbulento ocurre de forma brusca y repentina, lo cual se ha podido comprobar experimentalmente, sin que quede claro el mecanismo asociado a este cambio.

Tabla 4.1. Expresiones del factor de fricción  $f$  para régimen de flujo turbulento

Ecuación	Expresión
von Karman	$\frac{1}{\sqrt[2]{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon}{3.7D}\right)$
von Karman - Nikuradse	$\frac{1}{\sqrt[2]{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e\sqrt[2]{f}}\right)$
Colebrook- White	$\frac{1}{\sqrt[2]{f}} = 4\log_{10}\left(R_e\sqrt[2]{f}\right) - 0.4$
Blasius	$f = \frac{0.3164}{(R_e)^{\frac{1}{4}}}$

$D = 2R$ ;  $\frac{\varepsilon}{D}$ : rugosidad relativa de la pared del tubo

Figura 4.3. Comportamiento de las pérdidas de presión respecto a la velocidad del fluido



Fuente: elaboración propia.

## Enfoque estocástico

La velocidad promedio con la cual se mueve un fluido en un tubo depende de las velocidades locales espaciales, las cuales experimentan fluctuaciones temporales, las cuales dependen del valor de la velocidad. En régimen laminar estas fluctuaciones son de pequeña magnitud y pueden despreciarse, por lo que las velocidades locales pueden considerarse como variables deterministas y las predicciones de la ecuación de Navier Stokes resultan válidas.

A medida que la velocidad del fluido se incrementa también aumenta la magnitud de las fluctuaciones, hasta que se llega a un punto de bifurcación en el cual el patrón de flujo laminar desaparece debido a que las capas de flujo se mezclan entre sí, dando lugar al fenómeno de la turbulencia. Aunque la velocidad local fluctúa, el valor promedio temporal es constante en estado estacionario, generándose un perfil de velocidad promedio.

Se ha observado que este perfil de velocidad promedio es diferente al perfil parabólico típico del régimen laminar, mostrando una tendencia a ser prácticamente plano en las zonas cercanas al centro del tubo, que se corresponden con aquellas en las que el fluido alcanza la mayor velocidad local y las fluctuaciones locales son más importantes. Estas observaciones han llevado a diferentes autores a proponer el empleo del enfoque estocástico, formalismo que permite tomar en cuenta explícitamente el efecto de las fluctuaciones.

Para obtener el modelo estocástico se escribe la ecuación de Navier Stokes expresando la velocidad como la suma de su valor esperado y un término estocástico  $\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  que representa las fluctuaciones:

$$\frac{\partial(\mathbf{v} + \xi)}{\partial \tau} + (\mathbf{v} + \xi) \cdot \nabla(\mathbf{v} + \xi) = \frac{1}{\mathbf{R}_e} \nabla^2(\mathbf{v} + \xi) + \nabla \Lambda$$

Integrando con respecto al tiempo para determinar el promedio temporal, y considerando que:

$$\begin{aligned}\langle \xi \rangle &= \frac{1}{T} \int \xi dt = 0 \\ \langle \xi \xi^T \rangle &= \frac{1}{T} \int (\xi \xi^T) dt \neq 0\end{aligned}$$

se obtiene para la velocidad promedio local:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial \tau} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\mathbf{R}_e} \nabla^2 \langle \mathbf{v} \rangle + \nabla \Lambda + \nabla \cdot \langle \xi \xi^T \rangle$$

Para poder resolver esta ecuación diferencial estocástica es necesario conocer la función de distribución de probabilidad asociada a las fluctuaciones, de tal manera que se disponga de una ecuación para modelar el comportamiento de la matriz de las varianzas y covarianzas de las fluctuaciones, dada por  $\langle \xi \xi^T \rangle$ . El problema es que no se conoce esta función de distribución de probabilidad, ni tampoco cuál es la dependencia que existe entre la matriz de correlación de las fluctuaciones y el número de Reynolds<sup>1</sup>. Este problema se ha intentado resolver identificando al término asociado a las fluctuaciones con un tensor de corte turbulento:

$$\tau = \langle \xi \xi^T \rangle = \mu_t \nabla \mathbf{v}$$

Que involucra a una viscosidad turbulenta  $\mu_t$ , proponiéndose diferentes modelos para su estimación.

### Enfoque basado en la teoría de la complejidad

En este enfoque se intenta modelar el fenómeno de la turbulencia a través de la solución numérica de la ecuación de Navier Stokes, lo que ha dado origen a una rama de la ciencia conocida como Dinámica Computacional de Fluidos. Si bien se han logrado algunos éxitos en relación con la modelación del comportamiento de vórtices y remolinos, todavía no ha sido posible encontrar una explicación de por qué es el número de Reynolds el que puede considerarse como parámetro de control y cuáles son los valores límites de este que se asocian con la aparición de la turbulencia.

Se ha intentado encontrar una vía alternativa que, si bien no resuelve el problema, permite al menos predecir el comportamiento del perfil de la velocidad local promediada en el tiempo y cuantificar la intensidad de las fluctuaciones. El punto de partida de este enfoque es el hecho de que el perfil de velocidad es de naturaleza estocástica e irregular, y que este comportamiento irregular puede ser descrito a través de una línea irregular cuya dimensión fractal depende de la intensidad de la turbulencia. En este caso, en vez de promediar espacialmente esta función irregular en un espacio euclidiano para obtener la velocidad promedio, se considera que el perfil se describe a través de una función determinista que evoluciona en un espacio fractal cuya dimensión es equivalente a la dimensión fractal de la función irregular. Esta consideración conlleva a expresar la ecuación no dimensional de Navier Stokes como una ecuación diferencial fraccionaria:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial \tau} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\mathbf{R}_e} \nabla^{2\alpha} \langle \mathbf{v} \rangle + \nabla \Lambda$$

<sup>1</sup> La turbulencia depende del número de Reynolds, el cual es directamente proporcional a la velocidad promedio.

donde el orden de la derivada espacial  $1 < \alpha < 2$  se corresponde con la dimensión fractal del perfil de velocidad irregular y se encuentra estrechamente relacionada con el número de Reynolds. Debido a esto, la aplicación de esta ecuación solo es posible para fluidos que se encuentran en estado estacionario, ya que en estado no estacionario el orden de las derivadas fraccionales dependería del tiempo, lo que complica en grado sumo encontrar una solución analítica aún para el sistema más sencillo. Por otra parte, nótese que el valor de  $\alpha$  debe ser conocido *a priori* para poder aplicar este formalismo, aunque como se verá en la próxima existe una manera de predecir el comportamiento de  $\alpha$  con respecto a  $R_e$ .

### Aplicación del cálculo fraccionario para la modelación de flujos turbulentos en tubos

Para un flujo en tubos en estado estacionario donde la densidad y viscosidad del fluido son constantes la ecuación que describe el perfil de velocidad está dada por:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

Definiendo como variables no dimensionales:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{v_z}{V} \\ \gamma &= \frac{r}{R} \\ l &= \frac{z}{D} \\ \Lambda &= \frac{P}{\rho V^2} \end{aligned}$$

La ecuación (flujo en tubos 1) queda escrita de la forma:

$$0 = \Phi + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right)$$

donde el parámetro no dimensional  $\Phi$  involucra al gradiente de presión no dimensional y al número de Reynolds:

$$\Phi = \frac{\partial \Lambda}{\partial l} \frac{R_e}{4}$$

El próximo paso consiste en expresar la ecuación diferencial (flujo en tubos 2) en forma de una ecuación diferencial fraccionaria:

$$0 = \Phi + \frac{1}{\gamma} \mathbf{D}_\gamma^\alpha (\gamma \mathbf{D}_\gamma^\alpha \phi)$$

$$\alpha \geq 1$$

sujeta a las condiciones de contorno:

$$[\mathbf{D}_\gamma \phi]_{\gamma=0} = 0$$

$$\phi(1) = 0$$

cuya solución analítica exacta está dada por:

$$\frac{\phi}{\phi_{\max}} = (1 - |\gamma|^{2\alpha})$$

donde el valor de  $\phi_{\max}$  está dado por:

$$\phi_{\max} = \frac{\Phi}{2\alpha(1 + \alpha)\Gamma(2\alpha)}$$

Ahora se procede a integrar para determinar la velocidad promedio:

$$\langle \phi \rangle = \frac{\Phi}{2\alpha(1 + \alpha)\Gamma(2\alpha)} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - |\gamma|^{2\alpha}) \gamma d\gamma d\theta}{2\alpha(1 + \alpha)\Gamma(2\alpha)}$$

$$\langle \phi \rangle = \frac{\Phi}{2\alpha(1 + \alpha)\Gamma(2\alpha)} \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

Pero por definición de variables no dimensionales:

$$\langle \phi \rangle = 1$$

y por lo tanto:

$$\Phi = 4\Gamma(2\alpha)(\alpha + 1)^2$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l} = \frac{16}{\mathbf{R}_e} \Gamma(2\alpha)(\alpha + 1)^2$$

y el gradiente de presión no dimensional queda expresado como:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l} = \frac{16}{\mathbf{R}_e} \Gamma(2\alpha)(\alpha + 1)^2$$

en régimen laminar  $\alpha=1$ , por lo tanto:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l} = \frac{64}{\mathbf{R}_e}$$

de tal forma que la ecuación para régimen turbulento se expresa como:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial l} = f$$

de donde:

$$\frac{16}{\mathbf{R}_e} \Gamma(2\alpha)(\alpha + 1)^2 = f$$

El próximo paso consiste en expresar  $f$  como una función de  $\mathbf{R}_e$ , para lo cual se pueden utilizar los modelos estadísticos que se muestran en la Tabla 4.1 Si se selecciona el modelo de Blasius:

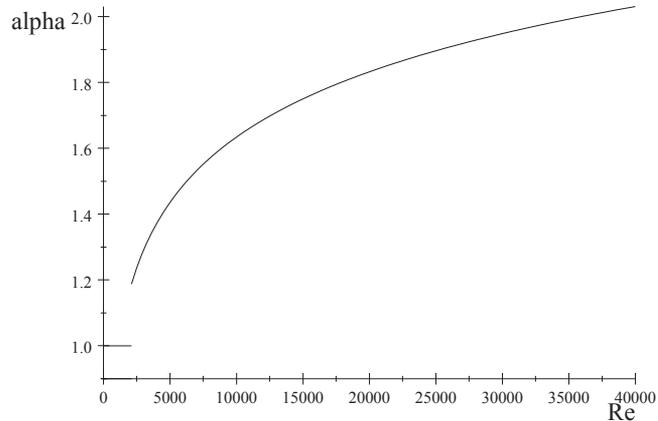
$$187(\Gamma(2\alpha)(\alpha + 1)^2)^{\frac{4}{3}} = \mathbf{R}_e$$

donde el valor de  $\alpha$  se obtiene a partir de la solución numérica de la EC. (Reynolds alfa) y la aplicación de métodos estadísticos:

$$\alpha=1$$
$$\alpha = 0.286 \ln(\mathbf{R}_e) > 2100$$

y su variación con respecto a  $\mathbf{R}_e$  se muestra en la Figura 4.4.

Figura 4.4. Comportamiento de la dimensión fractal del perfil temporal de la velocidad respecto al número de Reynolds



Fuente: elaboración propia.

Sustituyendo las variables no dimensionales se obtiene el perfil de velocidad para régimen turbulento:

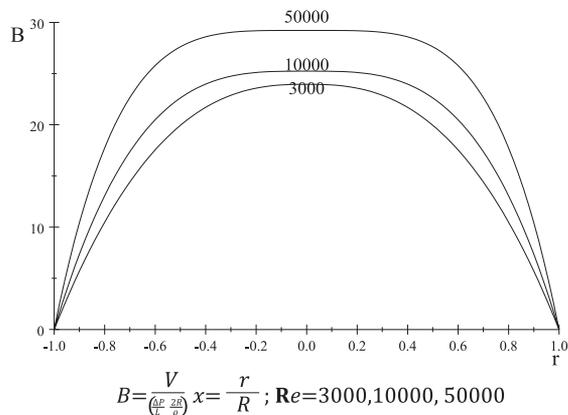
$$V = V_{\max} \left(1 - \left|\frac{r}{R}\right|^{2\alpha}\right)$$

$$\alpha = 0.286 \ln(R_e) - 1$$

el cual se muestra en la Figura 4.5, donde se ha considerado como parámetro el número de Reynolds.

El valor de  $R_e$  se incrementa cuando la viscosidad disminuye, de aquí que esta figura puede ser utilizada para analizar el efecto de esta propiedad sobre el comportamiento turbulento, considerando que el valor de  $\Omega$  es el mismo para todos los casos. Nótese que para fluidos de igual densidad, pero diferente viscosidad, en sistemas de iguales dimensiones y sometidos al mismo gradiente de presión, la velocidad se incrementa con la disminución de la viscosidad, mientras que el perfil tiende a presentar un mayor aplanamiento en las zonas cercanas al centro del tubo, lo cual es una característica del régimen turbulento en tubos. Estos resultados predichos se corresponden con los esperados, ya que al disminuir la viscosidad disminuyen las pérdidas por disipación viscosa.

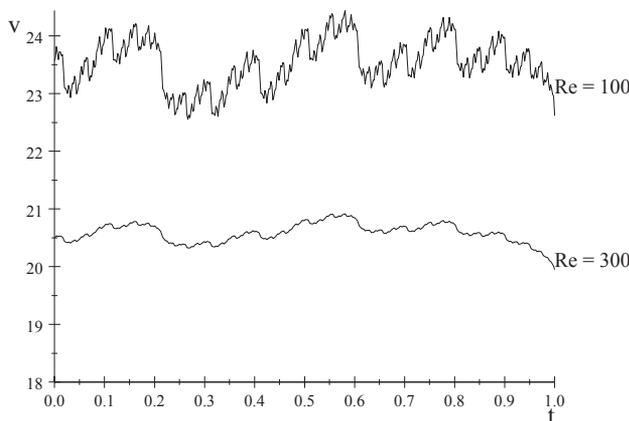
Figura 4.5. Perfil de velocidad predicho para flujo turbulento



Fuente: elaboración propia.

En la Figura 4.6 se muestran los perfiles de velocidad temporal predichos a partir de la función de Weierstrass para diferentes valores del número de Reynolds. Las líneas irregulares construidas para simular estos perfiles tienen una dimensión fractal igual a  $\alpha$ , que es el orden de la derivada fraccionaria que fue tomada como base para la modelación de los perfiles de velocidad y que depende del número de Reynolds. Nótese como las fluctuaciones se incrementan significativamente con el valor del número de Reynolds.

Figura 4.6. Simulación del comportamiento temporal de la velocidad local en régimen turbulento



Fuente: elaboración propia.

# **Dinámica** del **flujolaminar** **no newtoniano** en **tubos**

*Elena F. Izquierdo Kulich*

*Susana González Santana*



Los fluidos newtonianos se caracterizan por el hecho de que su viscosidad  $\mu$  depende de la naturaleza física del fluido, y solo cambia significativamente con la temperatura del sistema. De esta manera se asume que existe una relación lineal entre el gradiente de velocidad  $\gamma$  y la tensión de corte del fluido  $\tau$ :

$$\tau = -\mu\gamma = -\mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

Todos los gases y líquidos que están compuestos por moléculas pequeñas (peso molecular menor que 5000) presentan este comportamiento newtoniano. Sin embargo, para fluidos que presentan en su composición compuestos de alto peso molecular esta propiedad no se cumple, por lo que se conocen como fluidos no newtonianos. Aunque no se conoce exactamente la naturaleza químico - física de este comportamiento, se supone que este se relaciona con el hecho de que las moléculas de alto peso molecular tienen implícitamente muchos grados de libertad internos. Por otra parte, este comportamiento se ha observado que ocurre también en los sistemas dispersos, y en este caso se atribuye a la distorsión local de los perfiles de velocidad que causa la presencia de la fase dispersa.

La no linealidad entre el gradiente de velocidad y la tensión de corte causa que las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de estos fluidos sean no lineales. Si bien estas pueden resolverse de forma analítica para el caso del transporte en tubos en estado estacionario, esto no ocurre así en el caso no estacionario. La dinámica de estos sistemas puede ser predicha obteniendo una ecuación diferencial parcial fraccionaria equivalente que pueda ser resuelta de forma analítica mediante el método de separación de variables.

En este tipo de fluidos no es válido el concepto de viscosidad como propiedad del fluido, ya que esta cambia con el valor de la velocidad. Por esta razón se suele tratar con el concepto de viscosidad aparente, que es una propiedad del flujo, la cual depende no solo de la naturaleza del fluido sino también del gradiente de velocidad.

## Reología de los fluidos no newtonianos

Para los fluidos no newtonianos es necesario disponer de modelos que describan el comportamiento de la tensión de corte con respecto al gradiente de velocidad, los cuales se ajustan a los comportamientos experimentales observados para cada fluido en particular. Estos modelos pueden clasificarse en tres grupos:

- 1) Modelos newtonianos generalizados: describen el comportamiento del fluido en estado estacionario, y son ampliamente empleados en ingeniería para el diseño y evaluación de sistemas de flujo.

- 2) Modelos viscoelásticos lineales: son principalmente utilizados para describir el comportamiento del flujo no estacionario con pequeños gradientes de desplazamiento, y son de interés para los químicos que estudian las estructuras de los polímeros.
- 3) Modelos viscoelásticos no lineales: constituyen un intento de describir todos los tipos de flujo y son utilizados por los físicos y los matemáticos interesados en desarrollar teorías generales.

Los modelos newtonianos generalizados son los más simples, ya que solo toman en cuenta el carácter no newtoniano de la viscosidad. Dentro de este grupo el modelo más frecuentemente usado es el modelo potencial, el cual se escribe de la forma:

$$\tau = -\eta \dot{\gamma}$$

donde  $\dot{\gamma}$  es el gradiente de velocidad  $\eta$  es la viscosidad aparente (Pas), que depende del gradiente de velocidad de acuerdo con una ley potencial:

$$\tau = m \dot{\gamma}^n$$

Los parámetros  $m$  y  $n$  se determinan experimentalmente, donde  $n$  es el orden del flujo y  $m$   $\left[ \frac{\text{s}^{n-2} \text{kg}}{\text{m}^{n+1}} \right]$  es la consistencia.

### Solución de estado estacionario

El perfil de velocidad en estado estacionario para un fluido no newtoniano en régimen laminar cuya reología se expresa a través del modelo potencial se describe a través de la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi + m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^n \\ \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=0} &= 0 \\ v(R) &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es el gradiente de presión y su solución analítica es:

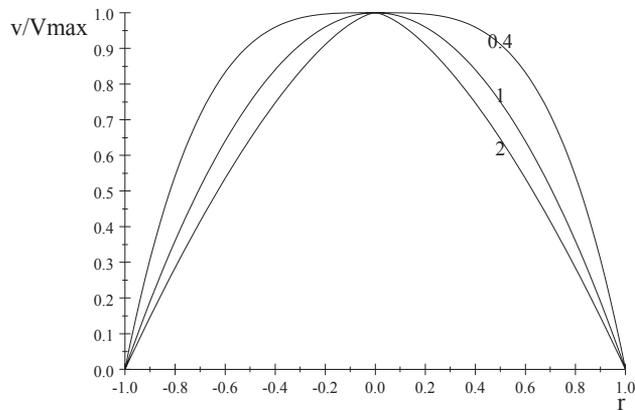
$$v(r) = \frac{n}{(1+n)} \left( \frac{\Phi}{2m} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Integrando con respecto al área de la sección transversal del tubo se obtiene el comportamiento del flujo con respecto al gradiente de presión:

$$Q = \frac{n\pi}{3n + 1} \left( \frac{\Phi}{2m} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Nótese que el comportamiento no lineal de la tensión de corte con respecto al gradiente de velocidad causa una distorsión del perfil de velocidad cuadrático típico del régimen laminar, para el cual  $n=1$  (Figura 5.1), así como un comportamiento no lineal del flujo con respecto al gradiente de presión.

Figura 5.1. Comportamiento del perfil de velocidad considerando como parámetro el orden del flujo  $n=0.4,1,2$



Fuente: elaboración propia.

El perfil de velocidad obtenido constituye la solución de una ecuación diferencial de orden y grado fraccional, ya que el valor del orden de flujo generalmente es un número no entero. Se puede demostrar que la ecuación (no newtoniano inicio) sujeta a las condiciones de contorno especificadas es equivalente a la ecuación diferencial fraccionaria:

$$0 = \frac{\Phi}{m} + A_0 \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha}$$

$$\alpha = \frac{1}{n}$$

$$A_0 = \left( \left( \frac{\Phi}{2m} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)$$

sujeta a las mismas condiciones de contorno.

**Equivalencia entre la ecuación diferencial fraccionaria y la ecuación diferencial de grado no entero**

La ecuación (no newtoniano inicio) puede ser expresada como el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} 0 &= r \frac{\Phi}{m} + r \mathbf{D}_r^\alpha \Xi + \Xi \\ \Xi(0) &= 0 \\ \Xi &= -A_0 \mathbf{D}_r^\alpha v \\ V(1) &= 0 \end{aligned}$$

donde  $\Xi$  representa la tensión de corte del fluido dividido por la consistencia y el radio del tubo:

$$\Xi = \frac{\sigma}{mR}$$

Resolviendo la ec. (no newtoniano 2):

$$\Xi = -\frac{1}{2m} r \Phi$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} r \Phi &= A_0 \mathbf{D}_r^\alpha v \\ v(r) &= \frac{1}{2\Gamma(2 + \alpha)A_0m} \Phi (R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}) \\ &= \frac{1}{(\alpha + 1)} \left( \frac{\Phi}{2m} \right)^\alpha (R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}) \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $\alpha$  se obtiene:

$$v(r) = \frac{n}{n + 1} \left( \frac{\Phi}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} (R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1})$$

que es igual a la solución obtenida para la ecuación diferencial de orden entero y grado no entero.

## Solución de estado no estacionario

En estado no estacionario el perfil de velocidad está dado por la ecuación diferencial parcial de orden entero y grado no entero:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \Phi + m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^n$$

la cual no puede ser resuelta mediante el método analítico. Sin embargo, es posible obtener una solución analítica mediante el método de separación de variables si esta se escribe como una ecuación diferencial fraccionaria del tipo:

$$\kappa \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\Phi_0}{m} + A_0 \frac{1}{x} \mathbf{D}_x x \mathbf{D}^\alpha v(x,t)$$

$$(\mathbf{D}_x v(t))_{x=0} = 0$$

$$v(1,t) = 0$$

$$v_{t=0}(x) = \frac{n}{(1+n)} \left( \frac{[\Phi_0]_{t \leq 0}}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} (1 - r^{\frac{1}{n}+1})$$

$$\Phi_0 = -\frac{\partial p}{\partial z} R^2$$

$$A_0 = \left( \left( \frac{\Phi}{2m} \right)^{1-\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right)$$

$$\kappa = \frac{\rho R^2}{m}$$

$$\alpha = \frac{1}{n}$$

donde:

$$x = \frac{r}{R}$$

Además de las condiciones de contorno expresadas, se va a considerar que el comportamiento no estacionario se debe a una perturbación tipo salto escalón en el gradiente de presión, de tal manera que el sistema alcanza un estado estacionario final donde el perfil de velocidad está dado por:

$$v_{t=\infty}(x) = \frac{n}{(1+n)} \left( \frac{[\Phi_0]_{t \geq 0}}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} (1 - x^{\frac{1}{n}+1})$$

Expresando la solución no estacionaria como:

$$v = v_{t=0}(x) + q(x, t)$$

y sustituyendo apropiadamente se obtiene:

$$W \mathbf{D}_t q(x, t) = \frac{1}{x} \mathbf{D}_x^\alpha q(x, t) + \mathbf{D}_x^{\alpha+1} q(x, t)$$

donde:

$$W = \frac{\kappa}{A_0} = \rho R^2 \Gamma(\alpha + 1) m^\alpha \left(\frac{\Phi}{2}\right)^{\alpha-1}$$

Expresando  $q(x, t)$  como el producto:

$$q(x, t) = h(x)g(t)$$

se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(x)} \left( \frac{1}{x} D_x^\alpha h(x) + D_x^{\alpha+1} h(x) \right) &= -C \\ \frac{1}{g(t)} W \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= -C \end{aligned}$$

donde  $C$  es una constante de integración que se determina a partir de las condiciones iniciales y de contorno. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$v(x, t) = v_{t=\infty}(x) + (v_{t=0}(x) - v_{t=\infty}(x)) \exp\left(-C \frac{t}{W}\right)$$

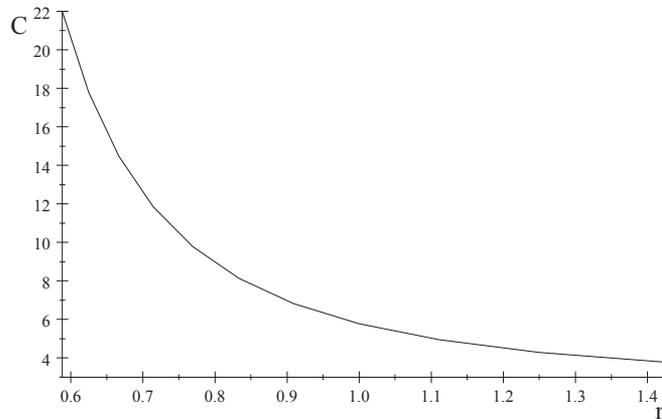
Al igual que ocurre en el caso del flujo newtoniano en estado no estacionario cuando la ecuación diferencial parcial se resuelve por el método de separación de variables, se obtiene que la constante de integración  $C$  puede tomar infinitos valores, lo cual indica que el sistema tiene infinitas soluciones posibles. En este caso el valor de esta constante se obtiene a partir de resolver mediante métodos numéricos la ecuación algebraica:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \frac{C^j \prod_{l=1}^j \left(1 - l - \frac{\alpha}{\alpha + 1}\right)}{\Gamma(1 + j) \Gamma\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} + j\right) (\alpha + 1)\right]} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N \frac{C^j \prod_{l=1}^j \left(1 - l - \frac{1}{n + 1}\right)}{\Gamma(1 + j) \Gamma\left[\left(\frac{1}{n + 1} + j\right) \left(\frac{n + 1}{n}\right)\right]} = 0$$

donde la estructura de esta ecuación indica que el valor exacto de  $C$  no es un número que pueda ser calculado. No obstante, para aplicaciones prácticas de este modelo se sugiere establecer un valor de  $N$  razonable, resolver la ecuación y establecer como solución el valor mínimo de  $C$  que sea real y positivo. En la Figura 5.2 se muestra el comportamiento de  $C$  con respecto al orden de flujo que se obtiene considerando  $N=10$ , el cual puede describirse aproximadamente a través del modelo estadístico:

$$C=41.815n^2 - 101.36n+64.499$$

Figura 5.2. Comportamiento de la constante de integración con respecto al orden de flujo  $n$



Fuente: elaboración propia.

El comportamiento no estacionario del flujo se obtiene integrando el perfil de velocidad con respecto al área de flujo, obteniéndose:

$$Q = Q_1 + (Q_0 - Q_1) \exp\left(-C \frac{t}{W}\right)$$

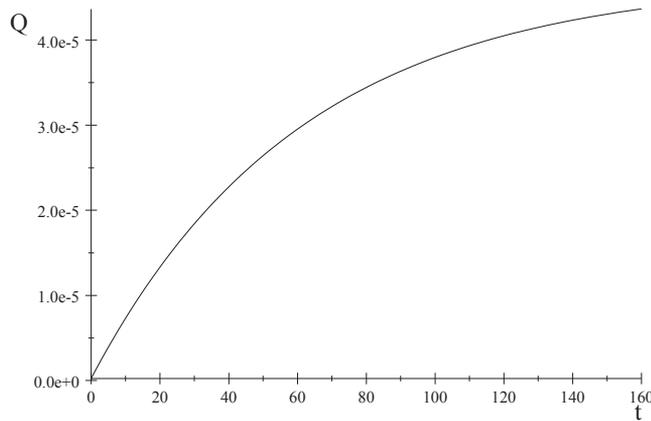
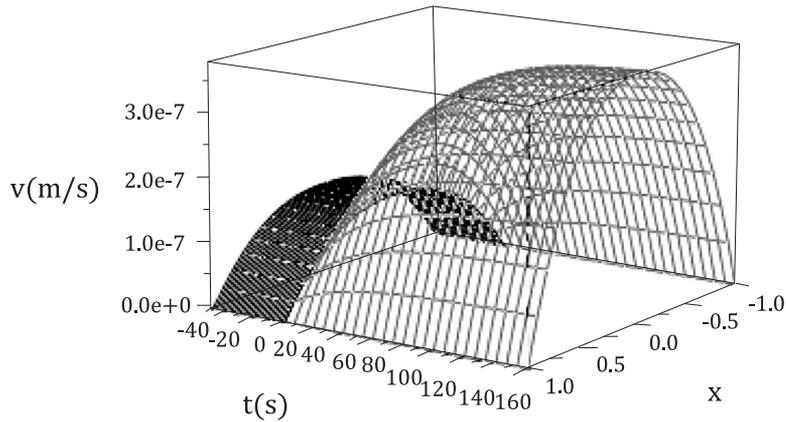
$$Q_1 = \left[ \frac{n\pi}{3n + 1} \left(\frac{\Phi_0}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}} \right] : t \rightarrow \infty$$

$$Q_0 = \left[ \frac{n\pi}{3n + 1} \left(\frac{\Phi_0}{2m}\right)^{\frac{1}{n_0}} R^{\frac{n+1}{n}} \right] : t \leq 0$$

donde se ha considerado que el cambio en el flujo no solo puede ser causado por una modificación del gradiente de presión, sino también por modificaciones de la composición del flujo que afectan su reología. En la Figura 5.3 se muestran

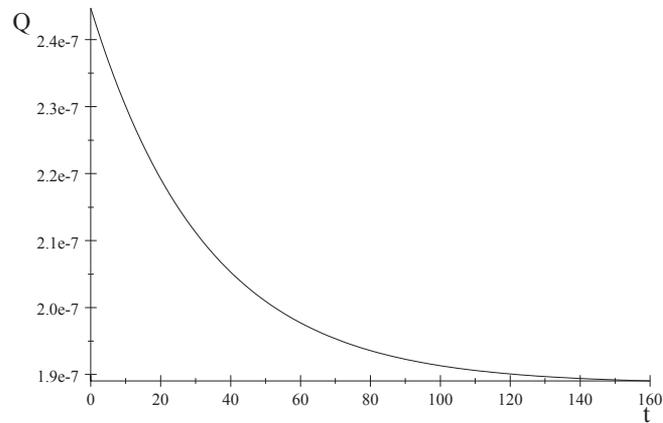
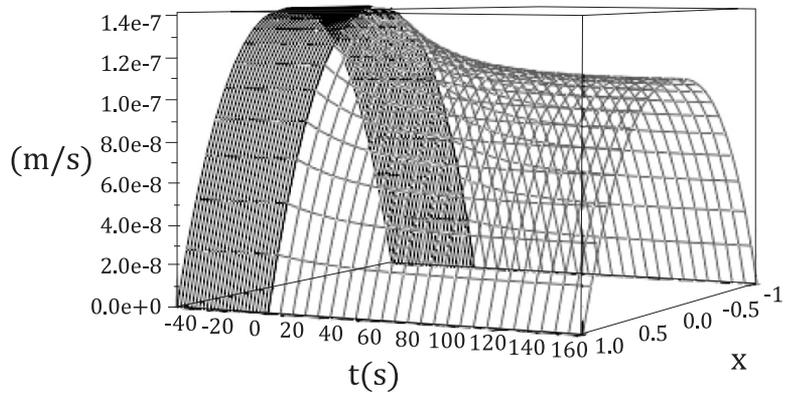
la evolución del perfil de velocidad con respecto al tiempo y el comportamiento temporal del flujo, respectivamente, cuando: Caso A: se produce un incremento del gradiente de presión; Caso B: se produce un incremento de la consistencia.

Figura 5.3. Dinámica del perfil de velocidad y el flujo para un fluido no newtoniano



Caso A:

$$\Phi_0 = 0.1 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}; \Phi_1 = 0.2 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}; n = 0.7; m = 50 \frac{\text{s}^{n-2} \text{kg}}{\text{m}^{n+1}}; \rho = 950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; R = 0.127 \text{ m}$$



Caso B:

$$\Phi_0 = 0.1 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}; n = 0.7; m_0 = 50 \frac{\text{s}^{n-2} \text{kg}}{\text{m}^{n+1}}; m_1 = 60 \frac{\text{s}^{n-2} \text{kg}}{\text{m}^{n+1}}; \rho = 950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; R = 0.127 \text{ m}$$



# Superficies sólidas

*Rocío R. Gallegos Villela*

*Lisbeth A. Brandt García*

*Ruth Galindo López*



Todas las superficies sólidas se caracterizan por presentar irregularidades, las cuales algunas veces pueden ser apreciadas en la escala macroscópica, mientras que otras veces estas solo son observables en la escala microscópica. Estas irregularidades se manifiestan en el carácter rugoso de las superficies, en la imposibilidad de volver a unir en partes un sólido previamente fracturado sin que medie un tercer componente y en el hecho de que el área es mayor que la que se obtiene si se identifica la superficie con un plano.

Las irregularidades superficiales se encuentran estrechamente relacionadas con el carácter impredecible o aleatorio de la altura  $h$  de la interfase, y pueden ser observadas directamente en la línea formada por la intersección entre la superficie y un plano perpendicular a esta, como se muestra en la Figura 6.1 En este sentido, la rugosidad  $\varrho$  se identifica con la desviación estándar  $\sigma$  de  $h$ :

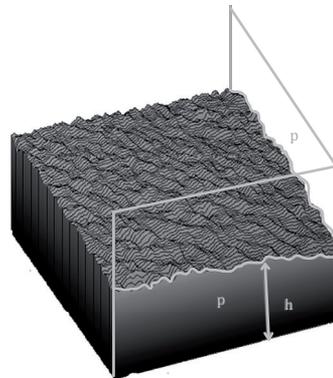
$$\varrho = \sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |h_i - \langle h \rangle|$$

$$\langle h \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i$$

donde  $N$  es el número de mediciones totales efectuadas.

Figura 6.1. Líneas de intersección entre la superficie y un plano perpendicular a esta



Fuente: elaboración propia.

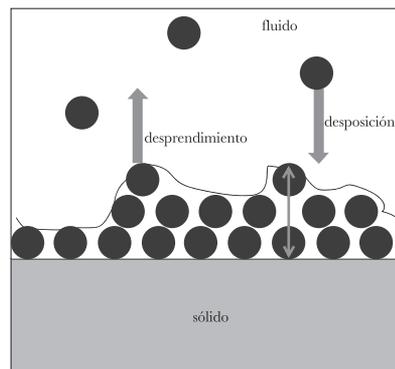
El carácter aleatorio de la altura de la interfase se atribuye a los procesos estocásticos que tienen lugar a escala microscópica durante la formación de la interfase, así como a procesos posteriores de deposición y desprendimiento de partículas que ocurren

debido a la exposición de la superficie con el ambiente, de la tal forma que la altura de la interfase y la rugosidad de la superficie pueden predecirse a través de modelos basados en las técnicas de modelación estocástica. Por otra parte, nótese que la morfología de las líneas superficiales<sup>2</sup> puede ser caracterizada a través de la geometría fractal, de tal manera que es posible obtener modelos que relacionen la morfología de la superficie con la dinámica de los procesos relacionados con su formación.

### Modelación estocástica de la formación de la superficie

Para obtener un modelo mesoscópico que permita describir la altura de la interfase de una superficie sólida se va a aplicar el formalismo basado en la ecuación maestra, donde las irregularidades son generadas por la aleatoriedad de los procesos que ocurren en la escala microscópica relacionados con la deposición y desprendimiento de partículas que se encuentran en el seno de una fase fluida que está en contacto con el sólido (Figura 6.2).

Figura 6.2. Visualización de la formación de la interfase



Fuente: elaboración propia.

Partiendo de esta suposición inicial se establecen las siguientes consideraciones:

1. Se define como variable extensiva el número total de partículas depositadas  $n$ , mientras que la variable macroscópica intensiva considerada es la altura  $h$  de la interfase, donde la relación entre ambas variables está dada por:

$$h = \frac{nv_0}{A}$$

<sup>2</sup> Las líneas superficiales son las que se obtienen cuando la superficie se intercepta con un plano perpendicular a esta, como se muestra en la Figura 6.1

donde  $v_0$  es el volumen de la partícula ( $m^3$ ) y  $A$  ( $m^2$ ) es el área observada.

2. La probabilidad de transición por unidad de tiempo de que tenga lugar la deposición de una partícula sobre la superficie se supone *a priori* que puede describirse a través de la relación:

$$W_{n+1/n} = \kappa_1$$

donde  $\kappa_1$  ( $s^{-1}$ ) es la constante de velocidad de deposición.

3. La probabilidad de transición por unidad de tiempo de que tenga lugar el desprendimiento se asume *a priori*:

$$W_{n-1/n} = \kappa_2 n$$

donde  $\kappa_2$  ( $s^{-1}$ ) es proporcional al inverso del tiempo de residencia de la partícula en la superficie.

A partir de las consideraciones establecidas se obtiene la ecuación maestra (EM) que describe el comportamiento de la probabilidad  $P(n,t)$  de tener  $n$  partículas depositadas al tiempo  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n,t)}{\partial t} &= (\mathbf{E}^{-1} - 1)\kappa_1 P(n,t) \\ &\quad + (\mathbf{E}^{+1} - 1)\kappa_2 n P(n,t) \\ P(0,0) &= 1 \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{E}^a$  es el operador paso que actúa sobre las variables discretas de tal forma que  $\mathbf{E}^a(f(x)) = f(x+a)$ .

Si el cambio  $\Delta n$  que tiene lugar cuando ocurre un proceso estocástico a nivel microscópico es prácticamente despreciable en comparación con  $n$ , entonces  $n$  puede considerarse como una variable continua, de tal forma que la ecuación de Fokker Planck (EFP) correspondiente a la EM es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial n}(\kappa_1 - \kappa_2 n)P(n,t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2}(\kappa_1 - \kappa_2 n)P(n,t) \end{aligned}$$

Sustituyendo aproximadamente la variable microscópica extensiva  $n$  se obtiene la EFP expresada en función de la variable intensiva macroscópica, en este caso la altura  $h$  de la interfase:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(h,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial h}(\lambda_1 - \kappa_2 h)P(h,t) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{v_0}{A} \frac{\partial^2}{\partial h^2}(\lambda_1 - \kappa_2 h)P(h,t)\end{aligned}$$

donde:

$$\lambda_1 = \kappa_1 \frac{v_0}{A}$$

La magnitud de las fluctuaciones internas escala con la relación entre el tamaño de las partículas que forman la interfase y el área total observada, por lo que esta tiende a cero en la escala macroscópica, cuando el sistema observado es muy grande en relación con el tamaño de las partículas. Por lo tanto, para poder caracterizar las irregularidades de la interfase el sistema debe ser descrito en la escala mesoscópica, en la cual el área  $A$  de la superficie observada debe ser del mismo orden de magnitud que el área  $a_0$  ocupada por una partícula individual. De esta manera, la EFP que describe el comportamiento del sistema en la escala mesoscópica queda escrita de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(h,t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial h}(\lambda_1 - \kappa_2 h)P(h,t) \\ &+ \frac{1}{2} l \frac{v_0}{A} \frac{\partial^2}{\partial h^2}(\lambda_1 + \kappa_2 h)P(h,t) \\ P(h_0,t) &= 1 \\ l &= \frac{v_0}{a_0}\end{aligned}$$

Como la EFP obtenida es lineal con respecto a las probabilidades de transición por unidad de tiempo, su solución es una función de distribución normal o gaussiana, donde el comportamiento temporal del valor esperado de la altura de la interfase  $\langle h \rangle$  y su varianza  $\sigma^2$  se describen a través de las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle h \rangle}{dt} &= \lambda_1 - \kappa_2 \langle h \rangle \\ \langle h \rangle_{t=0} &= h_0 \\ \frac{d\sigma^2}{dt} &= -2\kappa_2 \sigma^2 + l(\lambda_1 + \kappa_2 \langle h \rangle) \\ \sigma^2(0) &= 0\end{aligned}$$

En estado estacionario la derivada temporal que aparece en el lado izquierdo de estas ecuaciones diferenciales se hace igual a cero, de tal manera que:

$$\begin{aligned}\langle h \rangle &= k \\ \sigma^2 &= 1l(k + \langle h \rangle)\end{aligned}$$

donde el parámetro  $k$  es proporcional a la relación entre la constante de velocidad de deposición y la constante de velocidad de desprendimiento de las partículas, respectivamente, y está dada por:

$$\begin{aligned}k &= \frac{\lambda_1}{\kappa_2} \\ &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2} l\end{aligned}$$

En estado estacionario la rugosidad de la superficie predicha por este modelo está dada por:

$$q = \left( \frac{\kappa_1}{\kappa_2} l \right)^{0.5}$$

### Caracterización a través de la geometría fractal

En estado estacionario se cumple la propiedad de ergodicidad, lo cual significa que los promedios que se obtienen observando la altura de la interfase  $h$  en un mismo sitio cuando se realizan muchos experimentos independientes es equivalente a los promedios que se obtienen observando, para un mismo valor de tiempo, diferentes sitios de la superficie, es decir:

$$\langle h \rangle = \frac{1}{N \times \Delta t} \sum_{t=0}^N h(t + \Delta t) = \frac{1}{N \times \Delta L} \sum_{l=0}^N h(L + \Delta L)$$

Esto implica que la varianza temporal predicha por el modelo para un sitio específico de la superficie se relaciona con la morfología de la línea irregular que se proyecta sobre un plano perpendicular a la superficie, donde se considera que la distancia de correlación entre los sitios es del mismo orden de magnitud que la altura  $l$  de una sola partícula, de tal forma que:

$$\sigma \sim l^\alpha$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de rugosidad de la línea. El valor de  $\alpha$  se estima a partir de la relación:

$$\alpha = \lim_{l \rightarrow 1} \left( \frac{d \ln \left( \lim_{(h) \rightarrow l} \frac{1}{2} l(k + \langle h \rangle) \right)^{0.5}}{dl} \left( \frac{d \ln l}{dl} \right)^{-1} \right)$$

$$\alpha = \frac{1 + 0.5k}{1 + k}$$

El coeficiente de rugosidad  $\alpha$  se relaciona con la dimensión fractal  $f$  de la línea irregular, de tal manera que:

$$f = 2 - \alpha$$

$$f = \frac{1}{2} \frac{3k + 2}{k + 1}$$

donde  $f$  se puede determinar experimentalmente a partir de la imagen en 2D de la línea superficial mediante el método del conteo de cajas. Nótese que para un valor de  $\alpha$  igual a la unidad  $f=1$ , lo cual se corresponde con la caracterización morfológica de una línea recta que une a dos puntos. Cuando la línea es irregular, la longitud real entre dos puntos situados en la superficie es mayor que la de la línea recta y está definida como:

$$L_f \sim L^f$$

$$1 < f < 1.5$$

$$L_f > \odot$$

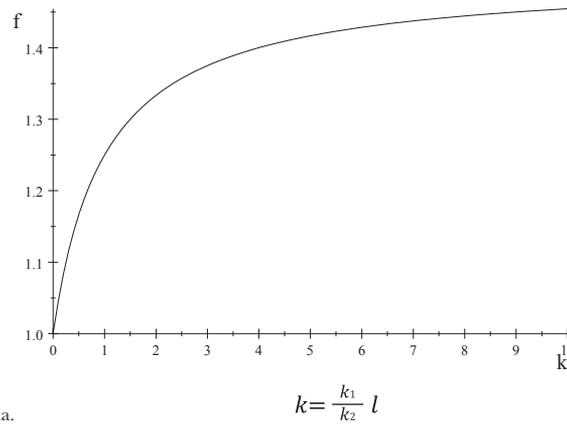
donde  $L$  es la longitud de la línea euclidiana que une a dos puntos que se encuentran en la línea superficial.

La dimensión fractal  $f$  y la rugosidad  $\rho$  de la superficie se encuentran relacionadas entre sí a través del parámetro  $k$ , de tal manera que sustituyendo apropiadamente se obtiene la rugosidad  $b$  expresada de forma no dimensional:

$$b = \sqrt{2} \frac{\sqrt{(3 - 2f)(f - 1)}}{3 - 2f}$$

En la Figura 6.3 se muestra el comportamiento de la dimensión fractal de la línea que caracteriza la morfología de la superficie con respecto al parámetro  $k$ .

Figura 6.3. Predicción del comportamiento de la dimensión con respecto al parámetro

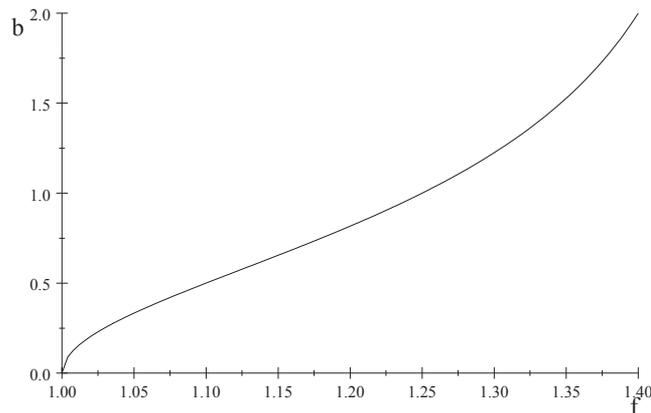


Fuente: elaboración propia.

$$k = \frac{k_1}{k_2} l$$

En la Figura 6.4 se muestra como la rugosidad de la superficie se incrementa con la dimensión fractal, lo cual se corresponde con el comportamiento lógico esperado. Para realizar esta predicción se ha considerado que la altura promedio de la interfase es igual a cero, donde la rugosidad se ha expresado de forma no dimensional. Nótese que la rugosidad es igual a cero para una superficie plana ideal, donde la línea superficial es una línea recta de dimensión fractal igual a 1.

Figura 6.4. Comportamiento de la rugosidad  $b$  de la superficie con respecto a la dimensión fractal  $f$  de la línea superficial



Fuente: elaboración propia.

## Área superficial

De acuerdo con la geometría euclidiana, el área de una superficie rectangular ideal que tiene una rugosidad igual a cero se determina a través del producto de la longitud de ambos lados del rectángulo:

$$A=L_1 \times L_2$$

Es claro que esta consideración no es aplicable a una superficie rugosa, donde la presencia de las fluctuaciones en la altura de la interfase causa que la línea proyectada en un plano perpendicular a la interfase sea irregular, con una longitud mayor que la correspondiente a una línea recta.

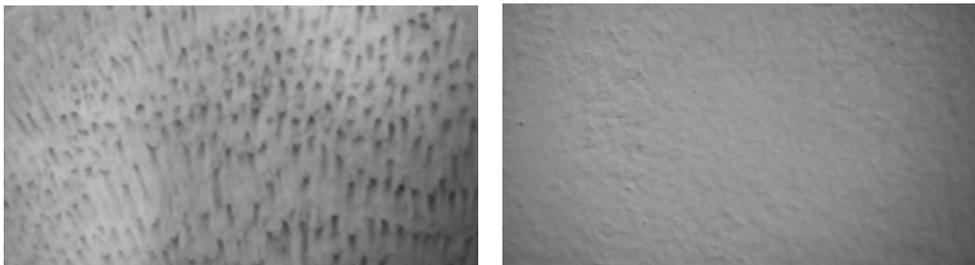
Por otra parte, la longitud de una línea irregular puede ser estimada a través de la integral fraccional:

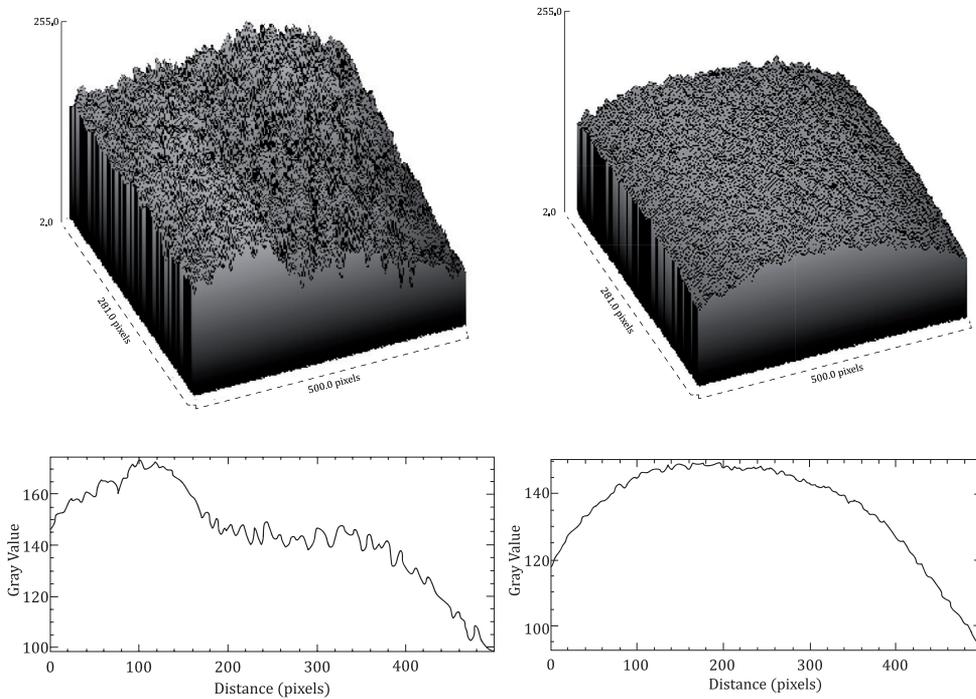
$$\delta^{1-f} D_l^{-f} 1 = \frac{\delta^{1-v}}{\Gamma(v+1)} l^v$$

donde  $\delta < 1$  representa la precisión de la medición de la longitud  $l > 1$  de una línea euclidiana que une ambos extremos de la línea irregular. A partir de estas consideraciones se establece que el área de una superficie rugosa puede entonces ser estimada a través de la relación:

$$A_e = \frac{\delta^{1-f}}{\Gamma(f+1)} (L_1)^f \times \frac{\delta^{1-f}}{\Gamma(f+1)} (L_2)^f$$

Figura 6.5. Imagen de las superficies, perfil de la interfase, dimensión fractal, rugosidad y área superficial correspondientes





$$f = 1.24; b = 0.96077; A = 17.811\text{cm}^2 \quad f = 1.22; b = 0.88641; A = 16.082\text{cm}^2$$

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 6.5 se muestran las imágenes de dos superficies observadas dentro de un rectángulo de tamaño 3.0 cm y 1.7 cm (precisión de la medición 0.1 cm) cuyas morfologías se caracterizaron mediante el uso del programa de tratamiento de imágenes ImageJ, con los valores de dimensión fractal calculados y la rugosidad y el área superficial estimados a partir del modelo propuesto.



# Flujo a través de medios fracturados

*Elena Francisca Izquierdo Kulich*



Un medio fracturado se define como un sólido en el cual existen espacios vacíos formados por fracturas, las cuales pueden ser visualizadas como espacios entre paredes sólidas irregulares que se encuentran distribuidos de forma no uniforme y a través de los cuales se puede transportar un fluido.

Los medios fracturados se caracterizan por ser espacios volumétricos altamente anisótropos, donde el área de flujo disponible está determinada por la forma, abertura y densidad de las fracturas, mientras que la longitud paralela al flujo depende de la interconexión que exista entre estas. Los medios fracturados se han caracterizado a través de diferentes parámetros, entre los que se pueden mencionar el número de fracturas por unidad de área o volumen, la aspereza (proyección de la pared de la roca en la fractura) y la abertura de la fractura (distancia perpendicular entre las paredes que forman la abertura), entre otros. Esta caracterización generalmente resulta bastante complicada, debido a que las irregularidades que caracterizan la morfología de las fracturas le confieren un carácter estocástico a cada uno de estos parámetros.

Es precisamente el carácter irregular asociado a la geometría del medio lo que impide obtener modelos simples para describir el comportamiento del flujo en estos sistemas. Los modelos básicos que se han empleado para esta descripción se pueden clasificar como:

- 1) Modelos continuos equivalentes: Utilizan las ecuaciones correspondientes al transporte en lechos porosos, donde la principal dificultad está en la determinación de los parámetros del modelo, que además no describe apropiadamente la situación física real.
- 2) Modelos discretos: Se basan en modelar el flujo a través de cada una de las fracturas mediante un modelo del tipo ley cúbica, siendo la principal dificultad la definición de la geometría de la red de fracturas.
- 3) Modelos mixtos: Surge de la combinación de los dos anteriores, presentando las mismas limitaciones que caracterizan a los modelos continuos equivalentes.
- 4) Modelos de red de canales: Suponen que el flujo tiene lugar a través de una porción pequeña del plano de las fracturas, y su dificultad fundamental está en la definición de la geometría del sistema.
- 5) Modelos de aproximación por redes de las fracturas discretas: En este tipo de modelos las fracturas se caracterizan a través de funciones de densidad de probabilidad asociadas a la longitud, orientación y localización de estas, entre otros factores.

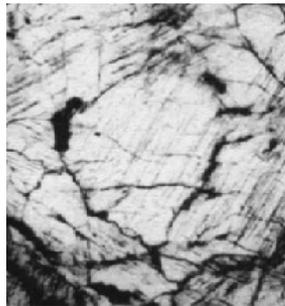
Por otra parte, la mayoría de las veces la aplicación práctica de estos modelos conlleva el empleo de métodos numéricos de solución, lo cual también incrementa la complicación del problema.

En este Capítulo se propone emplear un formalismo basado en la dimensión fractal para caracterizar la geometría de un medio fracturado, así como el empleo de las ecuaciones de fenómenos de transporte y el cálculo fraccional para obtener un modelo que permita predecir el comportamiento del flujo en este tipo de sistemas.

### **Morfología y dimensiones de las fracturas**

En la Figura 7.1 se muestran fotografías reales de dos medios fracturados, donde, para ilustrar las ideas, se va a suponer, que la fotografía 7.1.A corresponde al área de la sección perpendicular al movimiento del fluido y la fotografía 7.1.B corresponde a la sección paralela al movimiento del fluido. Es evidente que el área de flujo es menor que el área total del medio, ya que las fracturas ocupan solo una relativamente pequeña fracción del área total. Por otra parte, nótese que la longitud real que recorre el fluido es en realidad mayor que la longitud total del medio, lo cual se debe a la naturaleza irregular de la longitud de cada fractura.

Figura 7.1. Fotografías de medios fracturados



7.1.A. Sección transversal



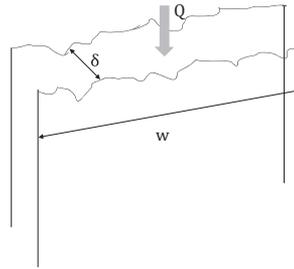
7.1.B. Sección Longitudinal

En este contexto, cada fractura puede considerarse como un sistema de placas paralelas, donde la distancia  $\delta$  entre las placas se identifica con la abertura de la fractura, el ancho de la fractura  $W$  se identifica con el ancho de las fracturas que se observan en la imagen correspondiente a la sección transversal y la flecha señala la dirección del movimiento del fluido.

La presencia de las irregularidades causa que sea muy difícil describir estas en términos de la geometría euclidiana, siendo más factible el empleo de la geometría fractal. Para simplificar, la abertura de la fractura puede considerarse como una variable euclidiana, donde la distancia entre las placas que forman la fractura es constante, mientras que el ancho y la longitud pueden caracterizarse a través de la dimensión fractal del contorno asociado a sus irregularidades. En la Figura

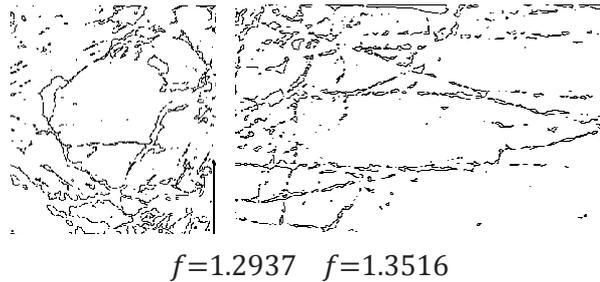
7.3 se muestran las imágenes de los contornos del medio irregular y el valor de la dimensión fractal correspondiente, determinados mediante el programa ImageJ, para los medios fracturados representados en la Figura 7.1.

Figura 7.2. Visualización de la morfología de las fracturas como placas paralelas irregulares



Fuente: elaboración propia.

Figura 7.3. Caracterización morfológica del medio fracturado cuyas fotografías se muestran en la Figura 7.1



Desde el punto de vista del flujo, existen dos parámetros importantes. El primero es la longitud real que recorre el fluido, cuya determinación se establece a través de la integral fraccional:

$$L_0 = \frac{k^{1-\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^L (l-u)^{\beta-1} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} k^{1-\beta} L^\beta$$

donde  $\beta$  representa la dimensión fractal y  $k$  es un parámetro que se identifica con la precisión de la medición, debiendo cumplirse que  $L$  debe ser mayor que  $k$ .

Para determinar el área de flujo se sigue un principio semejante al anterior. Si, para simplificar, se supone que la distancia  $\delta$  entre las placas que forman la fractura puede considerarse constante, entonces el área de flujo a través de una fractura se determina como:

$$a_0 = k^{1-\alpha} \times {}_0^W \mathbf{D}_y \delta {}_0^{\delta} \mathbf{D}_x^{-1}[1] = \frac{\delta}{\Gamma(\alpha + 1)} k^{1-\alpha} W^\alpha$$

siendo  $W$  la distancia entre los puntos extremos de la fractura y  $\alpha$  la dimensión fractal asociada al contorno del ancho de la fractura.

El área total de flujo puede estimarse a partir del número  $n$  de fracturas promedio que se encuentran en el medio:

$$A_0 = n \times a_0$$

El valor de  $n$ , que será importante para la determinación del flujo, puede estimarse calculando mediante un programa de tratamiento de imágenes el área ocupada por las aberturas en todo el medio y dividiendo por el área promedio de una fractura en la imagen.

### Perfil de velocidad en las fracturas

Para determinar el perfil de velocidad se selecciona el sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que el flujo se visualiza como en un sistema de placas paralelas. Debido a que en un medio fracturado las velocidades que pueden desarrollarse son significativamente pequeñas en comparación con las que se logran en tubos bajo el mismo gradiente de presión, se va a considerar que el régimen de flujo es laminar, de tal manera que la ecuación que describe el perfil de velocidad está dada por:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right] + \rho g_z$$

donde  $p$  es la presión,  $\mu$  y  $\rho$  representan la viscosidad y la densidad del fluido, respectivamente, donde la coordenada  $x$  es paralela a la abertura  $\delta$  de la fractura y la coordenada  $y$  es paralela al ancho de la fractura  $W$ . Si se considera que:

$$W \gg \delta$$

entonces el cambio de la velocidad en el eje  $x$  es más significativa que el cambio en el eje  $y$ :

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}$$

de tal manera que el perfil de velocidad puede describirse aproximadamente a través de la ecuación diferencial:

$$0 = \Phi + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$$

sujeta a las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} V_z(0) &= 0 \\ V_z(\delta) &= 0 \end{aligned}$$

El parámetro  $\Phi$  representa el gradiente de presión por fricción, que para un sistema euclidiano y una diferencia de altura igual a cero está definido como:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Como se está considerando que el fluido se transporta a través de un medio de longitud fractal, el gradiente de presión debe ser expresado a través de la derivada fraccional:

$$\Phi = \mathbf{D}^{\beta}_z p$$

donde  $\beta$  es la dimensión fractal del medio fracturado visualizado paralelo al movimiento del fluido. Resolviendo la ecuación diferencial correspondiente se obtiene que el perfil de velocidad está dado por:

$$v_z(x) = \frac{1}{2} \frac{\Phi}{\mu} \delta^2 \left( \frac{x}{\delta} - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right)$$

## Estimación del flujo volumétrico a través del medio fracturado

El flujo volumétrico  $Q$  se determina integrando el perfil de velocidad con respecto al área de flujo, siendo necesario el empleo del cálculo fraccional para tomar en cuenta el carácter fractal del contorno correspondiente al ancho de la fractura, de tal manera que:

$$Q = k^{1-\alpha} \times {}_0^W \mathbf{D}_y {}_0^\delta \mathbf{D}_x^{-1} [v_z(x)] = \frac{k^{1-\alpha} W^\alpha}{12 \times \Gamma(\alpha + 1)} \frac{\Phi}{\mu} \delta^3$$

Despejando se obtiene que el comportamiento de la presión en un medio fracturado se determina a través de la solución de la ecuación diferencial fraccionaria:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z p &= \frac{12Q\mu}{W^\alpha \delta^3} \Gamma(\alpha + 1) \\ p(0) &= P_0 \end{aligned}$$

cuya solución analítica exacta está dada por:

$$P_0 - P_L = \frac{12\mu q}{k_1^{1-\alpha} W^\alpha \delta^3} \Gamma(\alpha + 1) \frac{k_2^{1-\beta} L^\beta}{\Gamma(\beta + 1)}$$

Definiendo:

$$G = P_0 - P_L$$

y despejando se obtiene el valor del flujo que se puede transportar a través de un medio fracturado como función de la caída de presión por fricción:

$$Q = \frac{1}{12} \frac{\delta^3 W^\alpha}{\mu} \frac{k_1^{1-\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{G}{L^\beta} k_2^{\beta-1} \beta \Gamma(\beta)$$

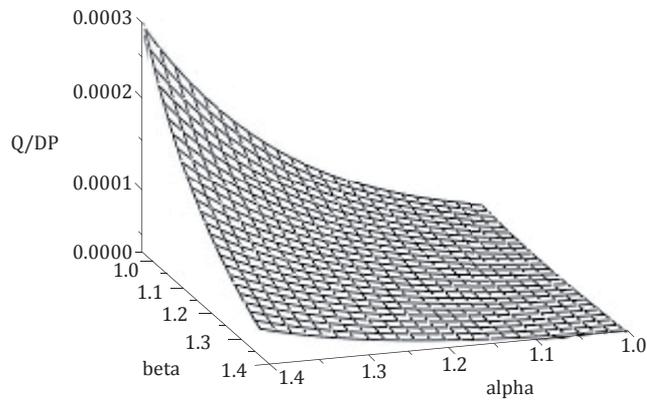
donde  $k_1$  es la precisión correspondiente a la medición de la longitud de la fractura perpendicular al movimiento del fluido y  $k_2$  es la precisión correspondiente a la medición de la longitud de la fractura paralela al movimiento del fluido. En la Figura 7.4 se muestra el comportamiento de la relación:

$$\frac{Q}{DP} = \frac{Q}{\left(\frac{G}{L}\right)}$$

con respecto a las dimensiones fractales  $\alpha$  y  $\beta$  para una fractura con una abertura

de 0.01 m, un ancho de 0.4 m y una longitud de 10 m a través de la cual se mueve un fluido de viscosidad 0.001 Pa.s. Se aprecia que un incremento de la dimensión fractal asociada al área de flujo conlleva a un incremento del flujo, ya que el aumento de  $\alpha$  significa que el ancho de la fractura es mayor que la que correspondería a un sistema de placas paralelas euclidiano, de tal manera que el área de flujo se incrementa. Por otra parte, el flujo disminuye cuando se incrementa la dimensión fractal  $\beta$ , lo cual se debe a que la longitud que debe recorrer el fluido es mayor que la línea recta que une los puntos entre la entrada y la salida del sistema, de tal manera que se incrementan las pérdidas de presión por fricción, lo que se manifiesta en una disminución del flujo que se puede lograr para un mismo gradiente de presión.

Figura 7.4. Influencia de la morfología del medio sobre el comportamiento del flujo en un medio fracturado



Fuente: elaboración propia.



# Flujo a través de medios porosos

*Carlos Zúñiga Leal*

*Yolanda G. Aranda Jiménez*

*Laura M. Chimely*



Los lechos porosos presentan una morfología compleja, existiendo una relación no trivial entre la distribución de tamaño de las partículas, la disposición espacial de estas y la porosidad del lecho. Esto complica la descripción fenomenológica del flujo a través de lechos porosos, que conlleva técnicas numéricas y un alto costo computacional. Desde el punto de vista práctico se suelen usar modelos relativamente simples, que relacionan la velocidad del fluido con el gradiente de presión en estado estacionario, y que involucran aspectos generales como el tamaño y forma de las partículas, la porosidad y la viscosidad del fluido, así como la necesidad del ajuste de parámetros empíricos a partir de los resultados experimentales observados.

Estos modelos se basan en dos aproximaciones fundamentales. En la primera se visualiza el lecho formado por un conjunto de partículas, alrededor de las cuales circula la fase fluida, estimándose las pérdidas de presión a partir de la suma de las resistencias individuales de las partículas que componen el lecho. En la segunda aproximación, que por razones de simplicidad es la más empleada, se visualiza el lecho como un haz de tubos de sección y forma aleatorias, y se aplican las ecuaciones básicas relacionadas con la circulación del flujo en tuberías.

Estos modelos tienen las siguientes desventajas: 1) no son adecuados para describir el comportamiento en estado no estacionario; 2) al no poder predecir el comportamiento del perfil de velocidad promedio en el lecho son inapropiados para tratar fluidos no newtonianos, en los que la viscosidad aparente es una función del perfil de velocidad, ni el caso de flujos bifásicos con separación total de las fases, donde la composición y disposición relativa de las fases influye significativamente sobre las pérdidas de presión y 3) el empleo de parámetros empíricos puede eventualmente limitar la validez del modelo cuando las condiciones de operación del lecho difieren significativamente de aquellas bajo las cuales fueron estimados estos parámetros. Estas limitaciones son importantes en algunas situaciones prácticas, como cuando se intenta describir el efecto de la inyección de vapor o de fluidos menos viscosos para facilitar el arrastre y la extracción de petróleo desde yacimientos porosos a través de la generación de un flujo bifásico.

Resulta interesante analizar si el empleo de herramientas no convencionales, como la geometría fractal y el cálculo fraccionario, hacen posible expresar las ecuaciones fenomenológicas de continuidad y cantidad de movimiento en una forma tal que, al ser resueltas, permitan obtener el perfil de velocidad y la velocidad promedio como una función de la porosidad y el tamaño de las partículas.

En este Capítulo se describe el comportamiento del flujo a través de lechos porosos partiendo de la hipótesis de que es posible emplear las herramientas relacionadas con el cálculo fraccional y la geometría fractal de forma conjunta para describir el comportamiento del flujo laminar estacionario, siendo el objetivo obtener

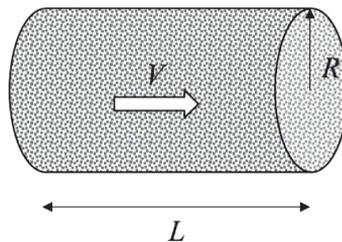
un modelo que describa la relación entre la velocidad del flujo y las pérdidas de presión por fricción. Para esto se tomaron en cuenta dos ideas básicas. La primera consistió en aplicar una integral fraccional para obtener una relación entre la dimensión fractal que caracteriza la distribución de partículas en el lecho y la porosidad, mientras que la segunda idea se basó en reescribir la ecuación diferencial que describe el perfil de velocidad en un tubo como una ecuación diferencial fraccionaria, donde el orden uno de cada derivada involucrada se iguala a la dimensión fractal de la distribución de partículas, y resolver dicha ecuación. Una vez que se obtuvieron ambos resultados se sustituye apropiadamente la dimensión fractal en la ecuación del perfil de velocidad, de tal forma que este queda expresado en función de la porosidad.

A partir del perfil de velocidad se obtiene la relación entre la velocidad promedio y las pérdidas de presión por fricción predicha por el modelo propuesto, predicciones teóricas que fueron comparadas por las obtenidas empleando el modelo de Blake y Kozeny, el cual ha sido validado experimentalmente.

### Relación entre la porosidad y la dimensión fractal de la distribución de partículas

El sistema bajo estudio se visualiza como un tubo de radio  $R$  (m) y longitud total  $L$  (m), a través del cual se mueve un fluido de densidad  $\rho$  ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) y viscosidad  $\mu$  (Pa.s) constantes. El tubo no es un espacio vacío, sino que dentro de este se encuentran presentes un conjunto de partículas inmóviles, que son las que forman el lecho poroso como tal, como se ilustra en la Figura 8.1.

Figura 8.1. Visualización del flujo a través de medios porosos



La porosidad  $\mathcal{E}$  es una propiedad que representa la fracción vacía del lecho, y que se calcula a través de la relación:

$$\epsilon = \frac{V - V_p}{V}$$

donde  $V$  es el volumen total del lecho ( $\text{m}^3$ ) y  $V_p$  es el volumen total ocupado por las partículas ( $\text{m}^3$ ). Debido a que para describir el perfil de velocidad es necesario definir un área perpendicular al flujo, y la porosidad es una propiedad que se define en tres dimensiones, el área de flujo se va a considerar una sección cilíndrica perpendicular al flujo, de radio  $R$  y longitud  $dz$ . Si las partículas que componen el lecho, esféricas y del mismo tamaño, y  $dz$  se iguala al radio  $\delta$  de las partículas, entonces la porosidad del lecho, que en este caso se relaciona con la fracción de la sección transversal a través de la cual puede transportarse el fluido, se estima a través de la relación:

$$\varepsilon = \frac{\pi R^2 \delta - N \frac{4}{3} \pi \delta^3}{\pi R^2 \delta} = \frac{4}{3} \frac{N}{R^2} \delta^2$$

donde  $N$  es el número total de partículas que caben dentro de la sección transversal. Otra forma de calcular la porosidad consiste en dividir la sección transversal en  $N$  celdillas cúbicas de volumen  $4\delta^3$  y en suponer que en cada una de estas se encuentra una partícula de radio de radio  $\delta$ , obteniéndose en este caso:

$$\varepsilon = \frac{N(2\delta)^3 - N \frac{4}{3} \pi \delta^3}{N(2\delta)^3} = 0.4764$$

Aunque las ecuaciones (LP 1) y (LP 2) son relaciones muy sencillas para estimar la porosidad, en realidad la situación es mucho más compleja. En muchos sistemas las partículas no tienen formas regulares, ni son todas del mismo tamaño, donde la desviación estándar de la función de probabilidad que describe la distribución de tamaños puede ser del mismo orden de magnitud que el valor promedio. En este caso, las partículas más pequeñas se pueden localizar entre los espacios vacíos que forman las partículas más grandes, lo cual permite incrementar el número total de partículas en el lecho con la consiguiente disminución de la porosidad. Por otra parte, los espacios vacíos entre las partículas dependen de cómo se distribuyan espacialmente las partículas, así como de la forma específica de estas, aspectos que a menudo presentan un alto grado de aleatoriedad.

Existe otra forma de caracterizar la morfología de un lecho poroso, la cual, si bien no resuelve todos los problemas, puede ser más apropiada para describir su complejidad. Si se divide la sección transversal perpendicular al flujo en  $N_t(1)$  celdas de tamaño  $l^3$  y se cuentan el número  $N(1)$  de estas que están ocupadas por partículas, y este proceso que se repite disminuyendo progresivamente el tamaño

1, entonces la dimensión fractal que caracteriza la morfología del lecho se calcula a través de la relación:

$$\alpha = \lim_{l \rightarrow \delta} \frac{\ln N(l)}{\ln N_t(l)}$$

donde el número de partículas contenidas dentro de una sección de radio  $r < R$  se determina como:

$$n \sim n_0 \left( \frac{r}{\delta} \right)^\alpha$$

$$1 < \alpha; \delta < r$$

siendo  $n_0$  el número de partículas que se encuentran en la distancia  $r = \delta$ , y cuyo valor es aproximadamente igual a 1. Para valores iguales de  $\alpha$  y  $r$  el número total de partículas se incrementa con la disminución del radio promedio  $\delta$ , lo que se corresponde con el hecho de que la cantidad de partículas que caben en el sistema se incrementa cuando su tamaño promedio disminuye. Por otra parte, para una relación  $\frac{r}{\delta}$  constante, el número de partículas se incrementa con la dimensión fractal  $\alpha$ , la cual, al describir el patrón espacial que forman las partículas como un todo, considera de forma implícita el promedio y la desviación estándar del tamaño de las partículas, así como la forma y disposición espacial de estas. En este punto, el valor de  $\alpha$  no puede ser mayor que 3, porque las partículas se encuentran dentro de un espacio de tres dimensiones. Por otra parte, el valor de  $\alpha$  puede ser menor que 2 para bajos valores de porosidad, para los cuales la sección transversal al flujo puede ser visualizada como un área divisora ideal, donde un valor de  $\alpha$  igual a 1 indica que dentro de sección solo puede existir una partícula, por lo tanto, en este contexto, no se trata de un lecho poroso, sino de un tubo vacío.

Visualizando la sección transversal como un área divisora ideal, para estimar la porosidad se va a considerar un valor de  $r$  arbitrario ( $0 < r < R$ ), y se calcula un área no dimensional  $\Omega$  a través de una integral fraccional en coordenadas polares, cuyo orden se asume igual a la dimensión fractal  $\alpha$ :

$$\Omega(\gamma, \alpha) = \int_0^{2\pi} \kappa^{\alpha-1} ({}_0\mathbf{D}_\gamma^{-\alpha} \gamma) d\theta = \kappa^{\alpha-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\gamma \frac{\gamma^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} d\gamma d\theta$$

$$\kappa = \frac{\delta}{R}; \gamma = \frac{r}{R}$$

donde  $\kappa$  es un parámetro de escalado que representa la relación entre el tamaño de las partículas y el tamaño del lecho. Nótese que el exponente  $\alpha-1$  asociado

al parámetro de escalado  $\kappa$  al sumarse con  $-\alpha$ , que es el orden de la integral fraccional, es igual a -1, de tal forma que se garantice la consistencia dimensional, ya que el área tiene unidades de longitud al cuadrado. La solución exacta de la integral (1.6) es:

$$\Omega(\gamma, \alpha) = \kappa^{\alpha-1} \frac{2\pi\gamma^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}$$

Si el área divisora para  $\alpha=1$  es equivalente al área total de la sección transversal del flujo (suma del área libre más la ocupada por las partículas, igual a su vez al área del tubo vacío), entonces el cociente entre el área estimada para  $\alpha>1, \gamma=1$ , y el área de la sección transversal total se relaciona con el cociente  $\mathcal{E}$  entre el área real del flujo  $A_f$  y el área total  $A_t$ , siendo entonces  $\mathcal{E}$  equivalente a la porosidad del lecho. Por otra parte, si se considera que  $\mathcal{E}$  también es equivalente al cociente entre el área de flujo  $a_f$  y el área total  $a_t$  cuando el sistema se visualiza a escala de una sola partícula individual ( $\gamma \rightarrow \kappa \rightarrow 1$ ), entonces:

$$\varepsilon = \left( \lim_{\kappa \rightarrow 1} \left( \lim_{\gamma \rightarrow \kappa} \kappa^{\alpha-1} \frac{2\pi\gamma^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \times \left( \frac{2\pi\gamma^{1+1}}{\Gamma(1+2)} \right)^{-1} \right) \right)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}$$

La ecuación (LP 3) describe la relación entre la dimensión fractal y la porosidad del lecho. Nótese que la porosidad tiende a 1 cuando la dimensión fractal tiende a 1, lo cual corresponde con el caso de un tubo vacío en el cual la porosidad es igual a 1, mientras que cuando la dimensión fractal tiende a infinito la porosidad tiende a cero. Dado que la dimensión fractal se incrementa con el número de partículas y la disminución de los espacios entre estas, este resultado se corresponde con lo cualitativamente esperado.

La determinación experimental de la dimensión fractal de un lecho poroso en tres dimensiones es prácticamente imposible, mientras que la porosidad es una propiedad observable que si puede ser determinada experimentalmente. Por esta razón es más conveniente disponer de una ecuación que permita estimar de forma sencilla la dimensión fractal a partir de la porosidad observada (debido a que la ecuación (LP 4) involucra a la función  $\Gamma(\alpha)$ , no es posible determinar  $\alpha$  de forma analítica, requiriéndose de métodos numéricos para su determinación para un valor

de porosidad dado), para lo cual fueron aplicados métodos estadísticos de regresión no lineal, a partir de lo cual se obtuvo:

$$\varepsilon = \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \alpha \right)^4$$

con un error máximo relativo de 5% y un 95% de confiabilidad. A partir de la ecuación (1.10) se puede entonces determinar el valor de  $\alpha$

$$\alpha = 5 - 4\varepsilon^{0.25}$$

### Estimación del perfil de velocidad del flujo en medio poroso

El perfil de velocidad laminar en coordenadas cilíndricas correspondiente a un flujo newtoniano, incompresible y estacionario en un tubo de radio  $R$ , fue modificada para describir el flujo a través de un tubo dentro del cual se encuentran distribuidas partículas sólidas inmóviles, el cual representa el lecho poroso. La modificación consistió en sustituir las derivadas espaciales de orden uno por derivadas espaciales de orden fraccionario e igual a la dimensión fractal (Anexo B), de tal manera que:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + R^{2\alpha-2} \left( \frac{\delta}{R} \right)^{1-2\alpha} \mu \frac{1}{r} \mathbf{D}_r^\alpha r \mathbf{D}_r^\alpha v = 0$$

La ecuación (LP 5) se expresa como un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias no dimensional con respecto a la coordenada espacial:

$$\Phi \kappa \gamma + \kappa^{1-\alpha} \frac{\partial^\alpha \sigma}{\partial \gamma^\alpha} = 0$$

$$\mu \gamma \kappa^{1-\alpha} \frac{\partial^\alpha v}{\partial \gamma^\alpha} = 0$$

donde  $\gamma$  es la coordenada espacial no dimensional  $\frac{r}{R}$ ,  $\mu$  es la viscosidad del fluido (Pa.s),  $v$  es la velocidad (m.s-1), y  $\Phi$  (Pa.m) es un parámetro que involucra a las pérdidas de presión por fricción  $(-\frac{\partial p}{\partial z})$  (Pa.m-1):

$$\Phi = -\frac{\partial p}{\partial z} R^2$$

siendo  $z$  la coordenada longitudinal al flujo. Las condiciones de contorno establecidas para resolver el problema están dadas por:

$$\sigma(0)=0$$

$$V(1)=0$$

y expresan que en la pared del tubo la velocidad es igual a cero, mientras que en el centro la velocidad exhibe un valor máximo.

La solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias permite obtener el perfil de velocidad en función de la dimensión fractal:

$$\frac{v(\gamma, \alpha)}{v_{\max}} = (1 - \gamma^{2\alpha})$$

$$\frac{v(r, \varepsilon)}{v_{\max}} = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{10-8\varepsilon^{0.25}}\right)$$

donde la velocidad máxima  $V_{\max}$  (m.s<sup>-1</sup>) está dada por:

$$v_{\max} = \frac{\Phi \kappa^{2\alpha-1}}{\mu(1 + \alpha)2\alpha\Gamma(2\alpha)}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial z} \frac{R^2}{4\mu} \varepsilon \frac{\Gamma(5-4\varepsilon^{0.25})}{\Gamma(10-8\varepsilon^{0.25})} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{8(1-\varepsilon^{0.25})+1}$$

### Velocidad promedio del flujo en lechos porosos

La velocidad promedio, definida como el flujo por unidad de área total, se determina a través de la integral:

$$V = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^1 v_{\max} \left(1 - \gamma^{10-8\varepsilon^{0.25}}\right) \gamma d\gamma d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma d\gamma d\theta}$$

cuya solución está dada por:

$$V = v_{\max} \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

$$= v_{\max} \frac{5-4\varepsilon^{0.25}}{6-4\varepsilon^{0.25}}$$

$$V = \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right) \frac{R^2}{4\mu} \frac{\varepsilon}{(6-4\varepsilon^{0.25})} \frac{\Gamma(6-4\varepsilon^{0.25})}{\Gamma(10-8\varepsilon^{0.25})} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{8(1-\varepsilon^{0.25})+1}$$

Por otra parte, la velocidad promedio  $V_c$  (m.s<sup>-1</sup>), definida como el flujo por unidad de área real de flujo, y que permite estimar la velocidad del flujo a través de los

canales que se forman entre las partículas del lecho, se determina dividiendo  $V$  por la porosidad, de tal forma que:

$$v_c = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{R^2}{4\mu} \frac{1}{(6-4\varepsilon^{0.25})} \frac{\Gamma(6-4\varepsilon^{0.25})}{\Gamma(10-8\varepsilon^{0.25})} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{8(1-\varepsilon^{0.25})+1}$$

### Gradiente de presión

El gradiente de presión que se establece en un medio poroso como una función de la viscosidad del fluido, la porosidad del lecho, las dimensiones del lecho y la velocidad del flujo se obtiene a partir de la ecuación (LP 6):

$$\frac{\partial P}{\partial z} = - \frac{4\mu}{R^2} V \frac{(6-4\varepsilon^{0.25})}{\varepsilon} \frac{\Gamma(10-8\varepsilon^{0.25})}{\Gamma(6-4\varepsilon^{0.25})} \left(\frac{R}{\delta}\right)^{8(1-\varepsilon^{0.25})+1}$$

de tal forma que para un fluido incompresible, newtoniano y en estado estacionario la caída de presión por fricción en un lecho de longitud  $L$  (m):

$$\frac{P_0 - P_l}{L} = \frac{4\mu}{R^2} V \frac{(6-4\varepsilon^{0.25})}{\varepsilon} \frac{\Gamma(10-8\varepsilon^{0.25})}{\Gamma(6-4\varepsilon^{0.25})} \left(\frac{R}{\delta}\right)^{8(1-\varepsilon^{0.25})+1}$$

Donde  $P_0$  (Pa) es la presión en la entrada y  $P_l$  (Pa) es la presión a la salida. Nótese que las pérdidas de presión se incrementan linealmente con el producto de la velocidad y la viscosidad del fluido, lo cual es un comportamiento característico del flujo en régimen laminar, así como de forma potencial con respecto al parámetro  $\frac{R}{\delta}$ , que se relaciona con el número de partículas.

### Resultados teóricos predichos y discusión

Si se considera  $\frac{\delta}{R}=1$ , y  $\alpha=1$ , que corresponden en este modelo al caso de un tubo vacío (significando que es aquel en el cual no hay partículas), entonces:

$$v(r) = \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right) \frac{R^2}{4\mu} \left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$V_0 = \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right) \frac{R^2}{8\mu}$$

Las ecuaciones (LP 7) y (LP 8) representan el perfil de velocidad y la velocidad promedio para flujos isotérmicos, estacionarios, newtonianos e incompresibles que se transportan en un tubo bajo un régimen laminar. Por lo tanto, este resultado

demuestra que el modelo propuesto para flujo en lecho poroso se reduce al modelo de flujo en tubo para porosidad igual a 1 y número de partículas igual 1.

Con el propósito de analizar las predicciones del modelo con base en el efecto de la morfología del lecho sobre la velocidad, para obtener estas se va a definir la velocidad no dimensional  $\phi$ :

$$\phi = \frac{v}{V_0}$$

de tal forma que el perfil de velocidad  $\phi$  no dimensional se escribe:

$$\phi = \kappa^{9-8\varepsilon^{0.25}} \frac{\varepsilon \Gamma(5-4\varepsilon^{0.25})}{\Gamma(10-8\varepsilon^{0.25})} (1 - |\gamma|^{10-8\varepsilon^{0.25}})$$

$$\kappa = \frac{\delta}{R}; \gamma = \frac{r}{R}$$

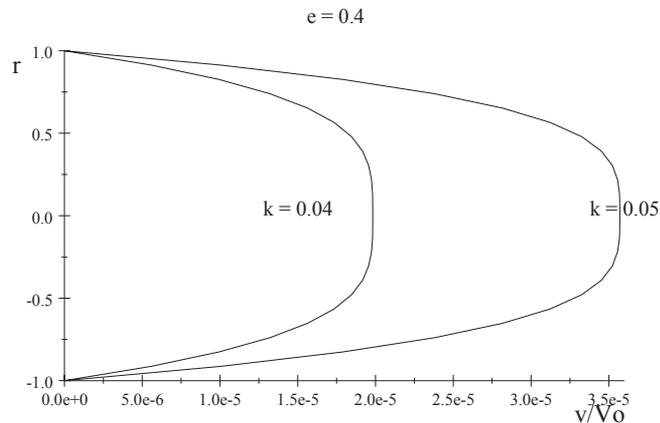
De forma semejante, la velocidad promedio no dimensional se define:

$$\eta = \frac{v}{V_0}$$

$$\eta = \frac{\Gamma(6-4\varepsilon^{0.25})}{\Gamma(10-8\varepsilon^{0.25})} \frac{2\varepsilon}{(6-4\varepsilon^{0.25})} \kappa^{9-8\varepsilon^{0.25}}$$

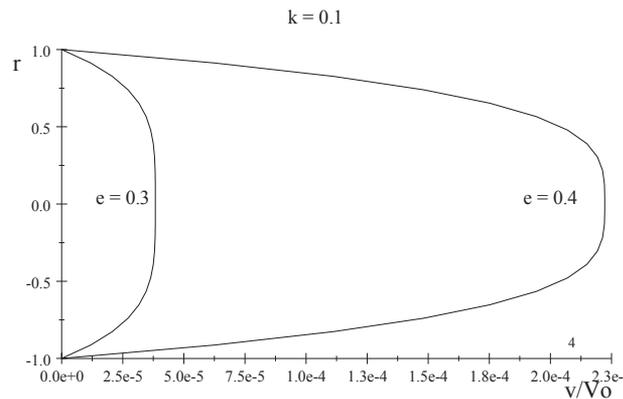
En las Figuras 8.2 y 8.3 se muestran los perfiles no dimensionales de la velocidad obtenidos para diferentes valores de los parámetros  $\kappa$  y  $\varepsilon$ . El modelo predice una disminución de la velocidad máxima con la disminución de la porosidad y el tamaño de partícula, lo cual es un resultado esperado, ya que la disminución de ambos parámetros implica un incremento del número de partículas, lo que implica una mayor pérdida de presión por fricción. Es de esperar, que, para igual gradiente de presión, se obtengan velocidades menores. Por otra parte, se aprecia que el perfil de velocidad se distorsiona con respecto al perfil parabólico correspondiente al flujo en tubos, mostrando un aplanamiento en las zonas cercanas al centro, el cual se incrementa con el número de partículas. Este comportamiento se explica considerando que el modelo propuesto toma en cuenta, de forma simultánea, los efectos de la pared (en las condiciones de contorno) y de las partículas (en el orden fraccionario de las derivadas espaciales). En las zonas alejadas de la pared, la influencia de esta disminuye y se hace prácticamente despreciable, ya que los efectos que predominan se corresponden al movimiento del fluido a través de los canales que se forman entre las partículas, los que se manifiesta en el aplanamiento del perfil de velocidad.

Figura 8.2. Comportamiento del perfil no dimensional de la velocidad para  $\varepsilon=0.4$  considerando como parámetro  $k = \frac{\delta}{R}$ .



Fuente: elaboración propia.

Figura 8.3. Perfil no dimensional de la velocidad para una relación de tamaño  $k = \frac{\delta}{R} = 0.1$  considerando como parámetro la porosidad  $e$ .



Fuente: elaboración propia.

Para analizar el comportamiento predicho de la velocidad promedio, conviene comparar este con el predicho por el modelo propuesto por Blake y Kozeny para régimen laminar y partículas esféricas, y que está dado por:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \lambda \frac{V}{(2\delta)^2} \mu \frac{(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon^3}$$

$$\lambda = 150$$

en el cual el valor del parámetro  $\lambda$  fue calculado mediante técnicas estadísticas a partir de los resultados experimentales observados. De esta ecuación se determina la velocidad promedio:

$$V = -\frac{\partial P}{\partial z} R^2 \frac{2}{75} \frac{\Phi}{\mu} \left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \frac{\varepsilon^3}{(\varepsilon-1)^2}$$

Expresando la velocidad promedio predicha por el modelo de Blake y Kozeny de forma no dimensional se obtiene:

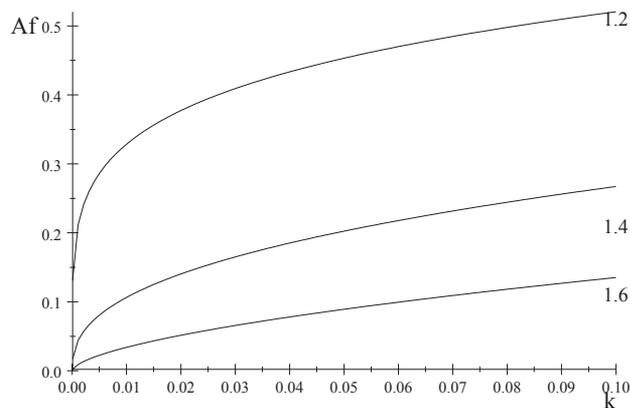
$$m(\kappa, \varepsilon) = \frac{V}{V_0} = 0.21333\kappa^2 \frac{\varepsilon^3}{(\varepsilon-1)^2}$$

Antes de continuar el análisis, conviene discutir algunas cuestiones relacionadas con las limitaciones comunes a ambos modelos y las diferencias entre ambos. El formalismo adoptado por Blake y Kozeny se basa en visualizar el flujo a través de n canales entre las partículas, donde n escala con el tamaño de estas, y en aplicar las ecuaciones para flujo en tubos para predecir la velocidad del flujo en cada canal. Esta visualización es inapropiada para establecer el perfil de velocidad, por lo que este modelo no considera el efecto de la pared del lecho (se han propuesto diferentes modelos para corregir esta limitación, como el reportado por Dolejs et al.). Por otra parte, de acuerdo con este modelo, para un valor de porosidad igual a 1, que corresponde al flujo en tubos, la velocidad se hace infinita para una caída de presión especificada (o el gradiente de presión se hace igual a cero, para cualquier valor de velocidad), predicciones que no son correctas, lo cual puede limitar significativamente el alcance del modelo para valores de porosidad mayores que 0.5. El modelo propuesto en este trabajo parte de una ecuación fenomenológica que incluye como parámetros la porosidad y el tamaño de partículas, además de las dimensiones del sistema y la viscosidad del fluido. El modelo obtenido a partir de la solución de esta ecuación toma en cuenta el efecto de la pared del tubo, y permite predecir el perfil de velocidad y es reducible al flujo en tubos para valores de porosidad y tamaño de partícula extremos. Otra diferencia, muy importante, entre ambos modelos, es que, mientras que el modelo de Blake y Kozeny involucra a un parámetro empírico cuyo valor debe ser determinado a partir de las observaciones experimentales, el modelo propuesto no necesita involucrar *a priori* ningún parámetro empírico, aunque una futura verificación experimental si puede conllevar a la necesidad de involucrar un parámetro empírico para permitir un ajuste apropiado del modelo a los datos experimentales observados.

En ambos modelos se considera que todo volumen libre de partículas del lecho se encuentra ocupado por el fluido en movimiento. Sin embargo, para tamaños de partículas muy pequeños, los fenómenos relacionados con la tensión superficial del fluido y su afinidad por la superficie de las partículas, los cuales dependen de la composición química, pueden tener efectos apreciables sobre la velocidad del fluido e incluso pueden causar que el fluido se retenga en algunas secciones del lecho. Otra limitación común a ambos modelos es que consideran al tamaño de las partículas, el radio del lecho y la porosidad como parámetros que pueden tratarse de forma independiente, cuando en realidad ambos se encuentran estrechamente relacionados entre sí.

En el formalismo adoptado en este trabajo, se obtiene una ecuación para describir el área divisora de flujo a través de la cual se predice que esta se incrementa con el tamaño de la partícula, tal y como se muestra en la Figura 8.4. Sin embargo, esta relación no puede ser utilizada para estimar directamente la porosidad, ya que la dimensión fractal solo tiene sentido cuando el sistema se observa a escala del tamaño de la partícula.

Figura 8.4. Comportamiento del área divisora de flujo predicha como función del tamaño de partícula considerando como parámetro la dimensión fractal



Fuente: elaboración propia.

Cuando se presentan los resultados predichos por un modelo, se interpretan observando en una gráfica en coordenadas rectangulares como cambia la variable de salida (en este caso la velocidad) con respecto a uno de los parámetros, que se toma como variable independiente, mientras que el otro parámetro o los otros se consideran constantes. En el caso que nos ocupa, por ejemplo, se va a analizar cómo

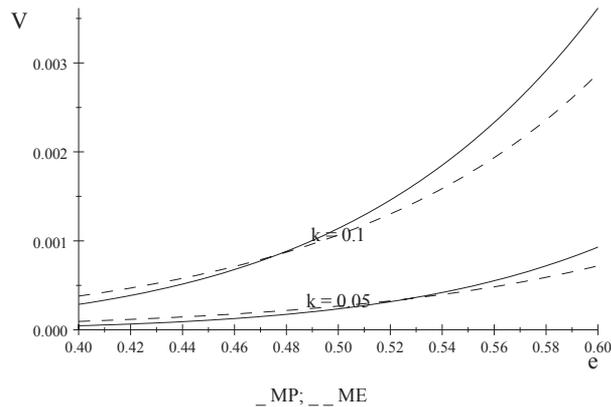
varía la velocidad con respecto al tamaño de partícula considerando como parámetro la porosidad, o como cambia la velocidad con respecto a la porosidad considerando como parámetro el tamaño de partícula. Pero como estos dos parámetros se encuentran relacionados, como se muestra en la Figura (8.4), puede que existan combinaciones de valores de ambos parámetros que no sean posibles físicamente. Sin embargo, esto no tiene una gran importancia desde el punto de vista práctico. Debido a todas las limitaciones planteadas, es siempre necesario determinar experimentalmente la distribución de tamaño de partículas y la porosidad del lecho tomando en cuenta la naturaleza del fluido, ya que las evidencias experimentales muestran que la porosidad observada depende de la naturaleza química del fluido involucrado.

En la Figura 8.5 se muestra el comportamiento de velocidad promedio predicho por el modelo propuesto (MP) y por el modelo de Blake y Kozeny (ME) con respecto a la porosidad del lecho considerando como parámetro la relación  $k = \frac{\delta}{R}$ . Ambos modelos predicen comportamientos cualitativos muy parecidos, donde los valores de velocidad tienen el mismo orden de magnitud, donde para valores de porosidad menor que 0.5 el modelo propuesto predice una velocidad menor. Aunque esta velocidad menor pudiera ser explicado porque este modelo incluye el efecto de la pared, también puede ser un resultado de las limitaciones propias del modelo, mientras que para valores mayores de porosidad pudieran plantearse cuestionamientos acerca de la validez del modelo de Blake y Kozeny por los aspectos de reducibilidad discutidos anteriormente. Las menores diferencias se observan para valores de porosidad entre 0.4 y 0.5, que incluyen el valor teórico para un lecho ideal ocupado por partículas esféricas del mismo tamaño, obteniéndose que para este valor teórico existe una correspondencia exacta entre ambos modelos para un valor de  $k=0.1$ , como se muestra en la Figura 8.6.

Tomando en cuenta las limitaciones de ambos modelos, y las significativas diferencias que existen entre ambos, esta correspondencia resulta ser sorprendente (Figura 8.7), y solo puede ser explicada si i) se considera que el formalismo matemático empleado es válido para la descripción de este sistema, y por tanto, pudiera en principio emplearse para la descripción de sistemas físicos en general, aunque no existe en realidad ninguna relación entre la dimensión fractal y el orden de las derivadas fraccionales; ii) si existe una relación entre la geometría fractal y el cálculo fraccionario, aun cuando no pueda ser demostrada lógicamente, que permite describir hechos físicos subyacentes en los sistemas heterogéneos complejos, de tal manera que es posible obtener ecuaciones más generales para describir la dinámica de los fluidos, siendo la ecuación de Navier Stokes un caso particular de estas ii) en realidad no existe ninguna relación entre la geometría fractal y el cálculo fraccionario,

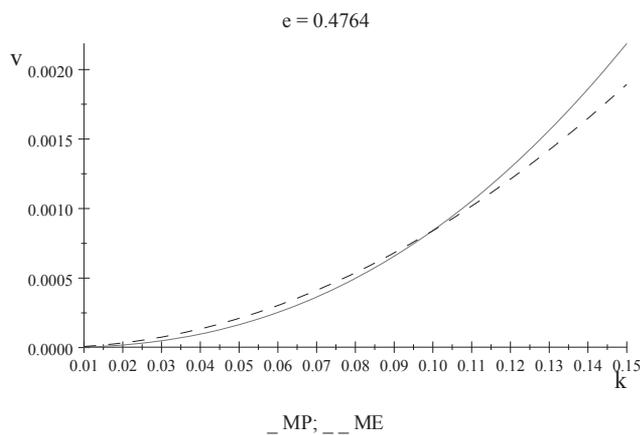
y la correspondencia obtenida entre los resultados predichos y los observados en este trabajo (el modelo de Blake y Kozeny fue corroborado experimentalmente) es totalmente fruto del azar. Dejamos esta respuesta a consideración del lector.

Figura 8.5. Predicción del comportamiento de la velocidad promedio por el modelo propuesto (MP) y por el modelo de Blake y Kozeny (ME) con respecto a la porosidad  $e$  considerando como parámetro la relación  $k = \frac{\delta}{R}$ .



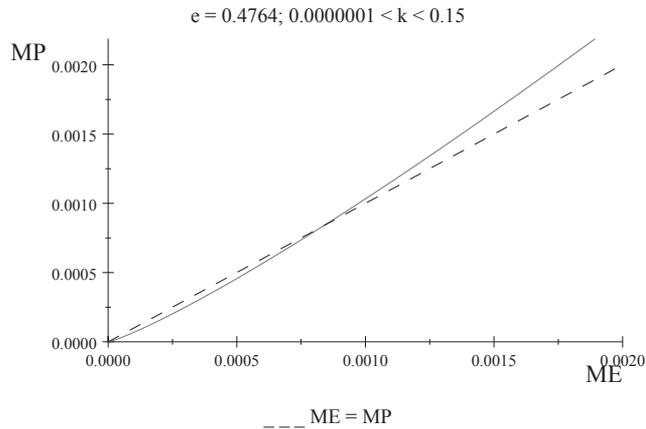
Fuente: elaboración propia.

Figura 8.6. Predicción del comportamiento de la velocidad promedio por el modelo propuesto (MP) y por el modelo de Blake y Kozeny (ME) con respecto a la relación  $k = \frac{\delta}{R}$  para el valor teórico de porosidad igual a 0.4764.



Fuente: elaboración propia.

Figura 8.6. Comparación entre los valores predichos por el modelo propuesto (MP) y por el modelo de Blake y Kozeny (ME) considerando como parámetro la relación  $k = \frac{\delta}{R}$  para el valor teórico de porosidad igual a 0.4764.



Fuente: elaboración propia.

De ser validado experimentalmente, el modelo propuesto presenta las siguientes ventajas con respecto a los precedentes: 1) al ser un modelo analítico, no requiere el uso de técnicas numéricas ni un alto costo computacional para la predicción de sus resultados, lo que constituye una de las ventajas de los modelos prácticos que se emplean habitualmente para el diseño y evaluación de este tipo de sistemas; 2) al predecir el comportamiento del perfil de velocidad, es apropiado para predecir el comportamiento de la velocidad en sistemas bifásicos con separación total de las fases, aplicando la misma metodología que se emplea para este tipo de flujo en tubos; 3) considerando la derivada temporal en la ecuación diferencial fraccional que describe el perfil de velocidad se puede predecir el comportamiento de estado no estacionario en estos sistemas y 4) puede, en principio, ser apropiado para describir el comportamiento del flujo no newtoniano en lechos porosos, aunque queda por investigar si las ecuaciones obtenidas pueden ser resueltas de forma analítica.



# Anexo



Si  $f$  es una función definida en el intervalo  $[0, \infty]$ , entonces la transformada de  $\mathcal{L}(f) = \hat{f}$  está definida por la integral:

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

donde, para los valores de  $s$  para los cuales esta integral converge, se define la transformada de Laplace de  $f$ .

## Tabla de la transformada de Laplace de diferentes tipos de funciones

### **Funciones de potencia**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$1 \quad \frac{1}{s}$$

$$t \quad \frac{1}{s^2}$$

$$t^n \quad \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \text{ es un entero positivo}$$

$$t^{-1/2} \quad \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$t^{1/2} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

$$t^\alpha \quad \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1$$

### **Funciones trigonométricas**

$$f(t) \quad F(s)$$

$$\sin kt \quad \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$\cos kt \quad \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$$\frac{\cos^2 kt}{s} \frac{s^2 + 2k^2}{s(s^2 + 4k^2)}$$

$$\frac{t \sin kt}{(s^2 + k^2)^2} \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$\frac{t \cos kt}{(s^2 + k^2)^2} \frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$\frac{2(1 - \cos kt)}{t} \frac{s^2 + k^2}{s^2}$$

$$\frac{\sin at}{t} \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$$

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$\sin kt + kt \cos kt$$

$$\frac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$\sin kt - kt \cos kt$$

$$\frac{2ks^3}{(s^2 + k^2)^2}$$

$$1 - \cos kt$$

$$\frac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$$

$$kt - \sin kt$$

$$\frac{k^3}{s^2(s^2 + k^2)}$$

$$\frac{a \sin bt - b \sin at}{ab(a^2 - b^2)} \frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$$

$$\frac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2} \frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$$

### **Funciones hiperbólicas**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$\sinh kt \quad \frac{k}{s^2 - k^2}$$

$$\cosh kt \quad \frac{s}{s^2 - k^2}$$

$$\sinh^2 kt \quad \frac{2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$$

$$\cosh kt \quad \frac{s^2 - 2k^2}{s(s^2 - 4k^2)}$$

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$t \sinh kt \quad \frac{2k}{(s^2 - k^2)^2}$$

$$t \cosh kt \quad \frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$$

$$\frac{2(1 - \cos kt)}{t} \ln \frac{s^2 + k^2}{s^2}$$

### **Funciones exponenciales**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$e^{at} \quad \frac{1}{s - a}$$

$$te^{at} \quad \frac{1}{(s - a)^2}$$

$$t^n e^{at} \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n \text{ a positive integer}$$

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \quad \ln \frac{s-a}{s-b}$$

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a2/4t} \quad \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a2/4t} \quad e^{-a\sqrt{s}}$$

$$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \quad \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \quad \frac{s}{(s-a)(s-b)}$$

**Funciones dadas por el producto de una función exponencial y una función trigonométrica**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$e^{at} \sin kt \quad \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}$$

$$e^{at} \cos kt \quad \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$$

**Funciones dadas por el producto de funciones exponenciales e hiperbólicas**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$e^{at}\sinh kt \quad \frac{k}{(s-a)^2 - k^2}$$

$$e^{at}\cosh kt \quad \frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2}$$

**Funciones dadas por el producto de funciones trigonométricas e hiperbólicas**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$\sin kt \sinh kt \quad \frac{2k^2 s}{s^2 + 4k^4}$$

$$\sin kt \cosh kt \quad \frac{k(s^2 - 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$$

$$\cos kt \sinh kt \quad \frac{k(s^2 - 2k^2)}{s^4 + 4k^4}$$

$$\cos kt \cosh kt \quad \frac{s^3}{s^4 + 4k^4}$$

**Funciones de Bessel**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$J_0(kt) \quad \frac{1}{\sqrt{s^2 + k^2}}$$

### **Función error complementaria**

$$f(t) \qquad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \qquad \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

$$2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-a^2/4t} - a \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \qquad \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$$

$$e^{ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \qquad \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$$

$$-e^{ab} e^{b^2 t} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \qquad \frac{be^{-a\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s} + b)}$$

### **Función de Dirac**

$$f(t) \qquad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$\delta(t) \qquad 1$$

$$\delta(t - t_0) \qquad e^{-st_0}$$

### **Función salto unitario**

$$f(t) \qquad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$f(t - a)H(t - a) \qquad e^{-as} F(s)$$

$$H(t - a) \qquad \frac{e^{-as}}{s}$$

### **Expresiones generales**

$$f(t) \quad F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

$$e^{at}f(t) \quad F(s-a)$$

$$f(t-a)H(t-a) \quad e^{-as} F(s)$$

$$f^{(n)}(t) \quad s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$t^n f(t) \quad (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)F(s)G(s)$$



# Bibliografía



- Abel, N. (1839). *Résolution d'un problème de mécanique*. Oeuvres Complètes. Gröndah: Christiana Baillie, R. y King, M. (1996) (Eds.). *Fractional Differencing and Long Memory Processes*, *J. Econometrics* 73
- Baleanu, D., Günvec Z. y Tenreiro, M. (2010). *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Dordrecht Heidelberg London New York. Springer
- Caputo, M. (1969). *Elasticità e Dissipazione*. Ed. Bologna: Zanichelli
- Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Dordrecht Heidelberg London New York. Springer
- Duarte, O. (2011). *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Dordrecht Heidelberg London New York. Springer
- Fiering, M. (1967). *Stream flow Synthesis*. Cambridge, Harvard University Press
- Friedlander, S. y Topper, L. (1961). *Turbulence. Classic Papers on Statistical Theory*. New York. Interscience
- Gardiner, C. (1991). *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences*. Fourth Edition Springer
- Grünwald, A. (1867). Ueber, Begrenzte, Derivationen und Deren Anwendung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 12. 441-480
- Hilfer, R. (Ed.). (2000). *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore
- Kalia, R. (Ed.) (1993). *Recent Advances in Fractional Calculus*. Global Publ., Sauk Rapids, Minnesota
- Kilbas, A., Srivastava, H. y Trujillo, J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam
- Kilbas, A. (Ed.) (1996). *Boundary Value Problems, Special Functions and Fractional Calculus*. Byelorussian State University, Minsk
- Kiryakova, V. (1994). *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Pitman Research Notes in Mathematics # 301. Longman, Harlow
- Létnikov, A. (1868). Theory of differentiation of an arbitrary order. *Mat. Sb.*, 3, 1-68
- Liouville, J. (1832). Mémoire sur questions de Géométrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Questions. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 21(13), 1-66 y 67-163
- Magin, R. (2006). *Fractional Calculus in Bioengineering*. Begell House Publishers, Connecticut
- Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Ed. Imperial College Press
- Mandelbrot, B. (1966). Forecasts of future prices, unbiased markets and 'martingale' models, *J. Business Univ. Chicago*, 89, 242, 1966
- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension, *Science*, 155, 636
- Mandelbrot, B. (1967). Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise. *Inst. Electrical Electronic Eng., Tras. Information Theory*, 13, 289

- Mandelbrot, B. (1967). *Sporadic random functions and conditional spectral analysis; self similar examples and limits. Proceedings, on the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, edited by L. M. LeCam and J. Neyman, vol. III, 155
- Mandelbrot, B. y Van Ness, J. (1968). *Fractional Brownian motions, fractional noises, and applications*. IAM Rev.
- McBride, A. (1979). *Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions*. Pitman Research Notes in Mathematics # 31, Pitman, London
- Miller, K. y Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York
- Monje, C., Chen, Y., Vinagre, B., Xue, D. y Feliu-Batle, V. (2010). *Fractional Order Systems and Controls, Fundamentals and Applications*. Londres: Springer-Verlag London
- Nishimoto, K. (1991). *An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus*. Descartes Press, Koriyama
- Nishimoto, K. (Ed.) (1990). *Fractional Calculus and its Applications*. Nihon University, Tokyo
- Oldham, K. y Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus: Theory and Applications. Differentiation and Integration of Arbitrary Order*. Academic Press, New York-London
- Pierantozzi, T. y Velazquez, L. (2005). An interpolation between the wave and diffusion equations through the fractional evolution equations Dirac like. *Journal of Mathematical Physics*, 43, 113512
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego
- Podlubny, I. (1994). *Solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients*, en: *Transform Methods and Special Functions*. (Eds. P. Rusev, I. Dimovski and V. Kiryakova), Science Culture Technology, Singapore
- Riemann, B. (1898). *Oeuvres mathématiques de Riemann*. Paris: Gauthier-villar
- Rocco, A. y West, B. (1999) Fractional calculus and the evolution of fractal phenomena. *Physica A*, 265 535-546
- Rosales, J., Guía, M., Martínez, J. y Baleanu, D. (2013). Motion of a Particle in a Resisting Medium Using Fractional Calculus Approach. *Proceedings of the Romanian Academy*, 14(1), 42-47
- Ross, B. (Ed.) (1975). *Fractional Calculus and its Applications*. Lecture Notes in Mathematics # 457, Springer Verlag, Berlin 1975. (Proc. Int. Conf. held at Univ. of New Haven, USA, 1974)
- Rubin, B. (1996). *Fractional Integrals and Potentials*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics #82, Addison Wesley Longman, Harlow
- Rusev, P., Dimovski, I. y Kiryakova, V. (Ed.) (1995). *Transform Methods and Special Functions*. Science Culture Technology, Singapore.
- Samko, S., Kilbas, A. y Marichev, O. (1993) *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland
- Srivastava, H. y Owa, S. (Ed.) (1989). *Univalent Functions, Fractional Calculus, and their Applications*. Ellis Horwood, Chichester

- Tarasov, V. (2010). *Fractional Dynamics; Applications of the Fractional Calculus to Dynamics of Particles, fields and Media* (522 pp.). Dordrecht Heidelberg London New York: Springer
- Thornston, S. y Marion, J. (2004). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Ed. Thomson Brooks/cole
- Van Kampen, N. (1992). *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland
- Velazquez, L. (2004). *A fruitful interplay: From nonlocality to Fractional Calculus*, en: Abdullaev F. Kh. and Konotop V. V. (Eds.), *Nonlinear Waves: Classical and Quantum Aspects*, Kluwer Academic Publisher, 129-133
- Velazquez, L. (2003). Fractional diffusion equation with internal degrees of freedom, *Journal of Computational Mathematics*, 21, 491-494
- Velazquez, L. (2004). Una panorámica del Cálculo Fraccionario y sus aplicaciones, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 98, 17 - 25
- West, B., Bologna, M. y Grigolini P. (2003). *Physics of Fractal Operators*, Springer-Verlag, New York
- Zorzano, M. y Velazquez, L. (2006), Remote temperature retrieval from heating or cooling targets, *Optics Letters*, 31, 1420-1422
- Zorzano, M., Mancho, A. y Velazquez, L. (2005). Numerical integration of the discrete-ordinate radiative transfer equation in strongly non-homogeneous media, *Applied Mathematics and Computation*, 164, 263-274
- Zorzano, M., Velazquez, L. y Jimenez, S. (2009). Retrieval of ultraviolet spectral irradiance from altered photodiode measurements, *Inverse Problems*, 25, 115023



*Aplicaciones del cálculo fraccionario en la descripción de fenómenos físicos y químicos*, de Edgardo Jonathan Suárez Domínguez, coordinador, publicado por la Universidad Autónoma de Tamaulipas, se imprimió en octubre de 2021 bajo el cuidado de Ediciones Coyoacán, S.A. de C.V. Av. Hidalgo No. 47-B, Colonia Del Carmen, Alcaldía de Coyoacán, 04100, Ciudad de México. El tiraje consta de 350 ejemplares impresos de forma digital en papel Cultural de 75 gramos. La revisión y diseño editorial correspondieron al Consejo de Publicaciones UAT.

