DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

Teoremas básicos del cálculo de una variable real, evaluación de procesos

• Función • Límites • Continuidad

Ramírez Hernández, Víctor Manuel

Demostraciones matemáticas. Teoremas básicos del cálculo de una variable real, evaluación de procesos /Víctor Manuel Ramírez Hernández, Hugo Isaías Molina Montalvo .—Ciudad de México : Colofón ; Universidad Autónoma de Tamaulipas, 2019.
104 págs. ; 17 x 23 cm.

1. Cálculo 2. Funciones de varias variables reales 3.Continuidad I. Molina Montalvo, Hugo Isaías, coaut.

LC: **QA303 R35** DEWEY: **515 R35**

Centro Universitario Victoria
Centro de Gestión del Conocimiento. Tercer Piso
Cd. Victoria, Tamaulipas, México. C.P. 87149
consejopublicacionesuat@outlook.com

Matamoros SN, Zona Centro Ciudad Victoria, Tamaulipas C.P. 87000
Consejo de Publicaciones UAT
Tel. (52) 834 3181-800 • extensión: 2948 • *www.uat.edu.mx*

Fomento Editorial Una edición del Departamento de Fomento Editorial
de la Universidad Autónoma de Tamaulipas

Edificio Administrativo, planta baja, CU Victoria
Ciudad Victoria, Tamaulipas, México
Libro aprobado por el Consejo de Publicaciones UAT
ISBN UAT: 978-607-8626-93-9

Colofón
Franz Hals núm. 130, Alfonso XIII
Delegación Álvaro Obregón C.P. 01460, Ciudad de México
www.colofonlibros.com • *colofonedicionesacademicas@gmail.com*
ISBN Colofón: 978-607-635-121-5

Publicación financiada con recurso PFCE 2019

Impreso en México • *Printed in Mexico* El tiraje consta de 400 ejemplares

Este libro fue dictaminado y aprobado por el Consejo de Publicaciones UAT mediante un especialista en la materia. Asimismo fue recibido por el Comité Interno de Selección de Obras de Colofón Ediciones Académicas para su valoración en la sesión del segundo semestre 2019, se sometió al sistema de dictaminación a "doble ciego" por especialistas en la materia, el resultado de ambos dictámenes fue positivo.

"PARA CREAR COSAS BUENAS PRIMERO HAY QUE CREER EN ELLAS"

70 AÑOS UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE TAMAULIPAS 1950-2020

DEMOSTRACIONES MATEMÁTICAS

Teoremas básicos del cálculo de una variable real, evaluación de procesos

• Función • Límites • Continuidad

Víctor Manuel Ramírez Hernández
Hugo Isaías Molina Montalvo

VERDAD, BELLEZA, PROBIDAD
UAT
Consejo de Publicaciones
Fomento Editorial
COLOFÓN

ÍNDICE

Dedicatoria

Tenemos el orgullo de poder manifestar el aprecio y el respeto que siempre sentimos por el maestro José Muñoz Delgado (QEPD), a quien dedicamos esta obra, un ser apasionado de la ciencias, la filosofía y las matemáticas

Prólogo

Este libro fue escrito con la intención de mostrar a los profesores de matemáticas y, a toda aquella persona que se interese por el quehacer de la ciencia por excelencia, a comunicar verdades matemáticas y a realizar las actividades principales que todo matemático se debe obligar a realizar, el quehacer cognitivo, las argumentaciones racionales, el trabajo analítico, la búsqueda de soluciones a problemas aún sin solución y la evaluación del conocimiento matemático por parte de la comunidad científica. Se conmina a que independientemente de la facilidad que proporciona a las actividades matemáticas el sin fin de aplicaciones informáticas, que la búsqueda de soluciones se realice por los medios históricos que han dado a la matemática el carácter de *Reina de las ciencias.* Es interesante cómo las aplicaciones informáticas han encontrado millones de números decimales de Pi, o cómo han recreado en espacios tridimensionales funciones multivariables (inimaginables hace apenas unos años) o cómo se ha podido demostrar un teorema con aplicaciones informáticas, como la demostración que se hizo del teorema de la minimalidad cromática mejor conocido como el teorema de los cuatro colores. Ante la facilidad de los procesos algorítmicos que estas herramientas tecnológicas proporcionan, casi se puede vaticinar la muerte de las demostraciones matemáticas pero, ¿qué pasaría si delegamos este trabajo a las aplicaciones informáticas? Es casi seguro que el carácter de la matemática como tal entraría en conflicto con su propia génesis.

Los tres temas principales de este libro, el concepto de función, los límites y la continuidad, proponen demostraciones de cálculo de una variable real, utilizando métodos de demostración matemática, recurrentemente el método de reducción al absurdo, es muy parecido al método de la prueba de hipótesis en estadística, porque en éste, uno sospecha (o quisiera) que una cierta hipótesis H es, o fuese verdadera. Se invita a los lectores a seguir la secuencia de las demostraciones propuestas, a tratar de comprender las verdades matemáticas y a enseñar las verdades matemáticas producto de las demostraciones de los teoremas más utilizados en el nivel medio superior. Los teoremas que aquí se proponen son solo una muestra del cálculo básico de una variable real, recordemos que en matemáticas no se acepta nunca una proposición como verdadera, hasta que se construye su demostración formal. Reitero la invitación a realizar los ejercicios propuestos y a no darse por vencidos, en matemáticas la única forma de garantizar el aprendizaje es mediante la práctica.

Víctor Manuel Ramírez Hernández

Capítulo I

Demostraciones matemáticas

Todos los que hemos tenido la experiencia de enseñar matemáticas y quienes por vocación o por gusto han tratado de aprenderlas, probablemente coincidiríamos, en que la manera de comunicar demostraciones, en su carácter es aviesa para estudiantes y profesores, por una parte porque para la mayoría de los estudiantes, es casi imposible navegar en las profundidades cognitivas de esta área de las matemáticas y para los profesores, quizá sea la escasez de sistemas simples y efectivos para tal propósito, ya que el quehacer cognitivo y el pensamiento abstracto no pueden evitarse en el aprendizaje de las ciencias matemáticas. Cuenta la historia que, al preguntar el rey Tolomeo I por una vía de acceso a los conocimientos geométricos de manera más fácil y simple que las demostraciones de los elementos, Euclides había respondido: «No hay camino de reyes en geometría»,[1] cabe mencionar que dificultad no implica imposibilidad, por eso se propone este material, que comprende los elementos básicos del análisis matemático en sus primeras demostraciones, creyendo como lo hace el doctor Solow (1993. p. 7), con la intención de que quienes enseñan matemáticas, puedan reconocer la naturaleza de los argumentos propios de las demostraciones matemáticas.

Además de compartir la perspectiva de Jean Dieudonné al referirse a los trabajos del matemático Hilbert[2] (Pastor, y Babini, 1985, p. 165)

> Lo que asombra a primera vista de los trabajos de Hilbert es la belleza de su grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de elegancia superficial que resulta de los cálculos hábilmente conocidos, sino de una satisfacción estética mucho más profunda que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en juego para alcanzarlos.

Otro de los propósitos de esta publicación, es que aquellos estudiantes avanzados o con conocimiento suficiente en pre cálculo o matemáticas de bachillerato, puedan tomar los retos de las demostraciones que aquí se proponen, como ejercicios

---

[1] Euclides (325-265 a.C.) Poco es lo que se conoce de su biografía: apenas que enseñó en una academia de Alejandría, la ciudad Helénica que Alejandro Magno fundó. Euclides estaba muy familiarizado con la tradición matemática griega que le precedió y especialmente con la primera crisis, la de los irracionales (Hawking, S., 2010, pp. 1-2).

[2] Hilbert, D. (1862-1943), matemático alemán, fue uno de los fundadores de la Teoría de la demostración, la Lógica matemática y la distinción entre Matemática y Metamatemática. Hasta 1889 no se sintió en todas las matemáticas, el choque de la metodología de Euclides en la obra de otro gran geómetra, Hilbert (Bell, E. T., 1985, p. 85).

resueltos y demostrados o propuestos sin solución. Y también a usted que lo tiene en sus manos para que pueda desarrollar habilidades y fortalecer su lenguaje matemático, para descubrir y poder enseñar verdades matemáticas, que conforman el entendimiento más rico y profundo que el matemático posee.

En la construcción de un enunciado o proposición, se emplea un método que básicamente es un esquema lógico argumentativo válido y perteneciente a los fundamentos de la matemática, o sea que, en un argumento válido, se deduce lógicamente una proposición verdadera, llamada conclusión de un conjunto de proposiciones verdaderas, llamadas hipótesis, y la validez lógica del mismo estriba en que cuando las hipótesis son verdaderas entonces las conclusiones también lo serán.

En matemáticas no se acepta nunca una proposición como verdadera, hasta que se construye su demostración formal, aunque la proposición sea válida para un número finito de casos, esto no significa que la proposición sea válida para todo el universo (Morales, 2008, p. 7).

> En la matemática la ciencia deductiva por excelencia no es aceptada una conjetura como verdadera hasta que es construida formalmente su demostración. El matemático profesional demuestra con naturalidad y facilidad, un proceso que fuera de la comunidad de matemáticos se podría considerar innecesario o excesivamente complicado y no plenamente comprensible, debido a varios factores, como por ejemplo: la notación matemática, contenido y nivel matemático, condensación de la secuencia de proposiciones y resultados del lenguaje y metalenguaje matemático empleado, desconocimiento o no especificación del método de demostración empleado, entre otros.

Existen en demasía ejemplos que dan fe de los acercamientos que llevan al pensamiento a descubrir las verdades matemáticas. Por citar un ejemplo de un acercamiento hacia una verdad matemática, matemáticos de la talla de Euclides, Euler,[3]

[3] Euler, l. P. (1707-1783). El matemático más prolífico de la historia, a quien sus contemporáneos llamaban *La encarnación del análisis*, definió la constante que lleva su nombre, creó la ecuación más hermosa del mundo que es, ($e^{i\pi}+1=0$). La extensión de los trabajos de Euler no ha sido exactamente conocida, pero se calcula que se necesitarían ochenta grandes volúmenes para la publicación de todos sus trabajos en matemáticas (Bell, E. T., 1937, p. 268).

Gauss,[4] Riemann[5] y Ramanujan,[6] entre otros grandes del pensamiento matemático fueron tentados a encontrar una referencia matemática que generalizara cómo determinar si un número es primo, garantizar que sólo sea divisible por sí mismo y por la unidad. Hasta la fecha no existe tal generalización, pero sí hay acercamientos que determinan si un número es primo o no, la criba de Eratóstenes es uno de ellos, otro es el realizado por Gauss, en términos del comportamiento proporcional de las apariciones de los primos, en secciones de números, que fue una gran idea, digna de un genio de las matemáticas como Gauss, sin embargo no se considera una proposición verdadera, porque no se construyó una demostración formal.

Sobre el comportamiento de los números primos, Gracián manifiesta que: (2010, p. 5):

> Los números primos son un auténtico incordio, aparecen donde quieren, sin previo aviso, de una forma aparentemente caótica, y sin seguir ningún tipo de regla. Y lo peor del caso es que no se pueden ignorar: son la esencia de la aritmética y hasta cierto punto de toda la matemática.

Este tipo de retos al pensamiento humano hacen dedicarle mucho tiempo al quehacer cognitivo, tratando de encontrar fórmulas y generalidades que permiten fortalecer los cimientos de la ciencia por excelencia.

---

[4] Gauss, J. (1777-1855). Conocido como el Príncipe de los matemáticos, demostró el teorema fundamental del álgebra, predijo la órbita de Ceres, profundizó en ecuaciones diferenciales, realizó importantes contribuciones al electromagnetismo con la ley que lleva su nombre, la campana de Gauss, cuyas aplicaciones en las diferentes ciencias le dan la importancia universal. Durante 1795, Gauss propuso sus primeras aproximaciones para la función $\pi(n)$ que contaba los números primos menores a n. (Hawking. S. 2010, p. 494).

[5] Un geómetra como Riemann pudo haber previsto las características más importantes del mundo actual (Eddington. A.S.). Riemann (1826-1866), es considerado uno de los matemáticos más originales de los tiempos modernos. En 1851, Riemann presentó su disertación doctoral "Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja". Desde 1853 en adelante Riemann se dedicó a la física matemática que siempre fue su interés. Aunque un año más tarde publicó una de sus obras maestras "Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría" (Bell, E.T., Cap. 26, pp. 551, 567).

[6] Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920). De origen hindú extremadamente humilde, su legado en la teoría de números, las series, el análisis matemático en el estudio de las particiones y los números primos. Lo llevaron a ser reconocido por la Universidad de Cambridge, con las distinciones de, miembro de la London Mathematical Society. *Fellow* de la Royal Society y nombrado *Fellow* del Trinity College de Cambridge (Pellicer, M. L., 2014, pp. 43-54).

Hasta no encontrar los métodos que permitan construir las demostraciones formales, quedarán como asignaturas pendientes todos los teoremas que aún faltan por demostrar en matemáticas.

Algunos métodos de demostración que empleamos en este texto son: el método directo de demostración, el método indirecto de demostración (con el método de reducción a lo absurdo y el método de contra-positiva también conocido como contra-recíproca), además, el método de inducción matemática, aunque existen otros métodos y técnicas como el método progresivo regresivo, el método por construcción, la técnica de unicidad o exclusiva, entre otras, en este libro se utilizan de manera recurrente los métodos directos e indirectos de demostración.

Cuando en 1927, Hilbert sintetiza sus ideas, expone los cimientos básicos para su programa de metamatemática, en el apartado 2, da una definición de demostración matemática, según Hilbert (citado en Castro y Pérez, 2007, p. 222):

> Una demostración matemática consiste en una sucesión de fórmulas que o bien son axiomas, o bien son teoremas, o se han obtenido de éstas mediante inferencias admisibles.

En la actualidad se vislumbra un sinfín de complicaciones para la comunidad matemática en el hecho de redefinir el quehacer matemático, esto porque ahora se ha podido realizar una demostración de un teorema matemático, el de los cuatro colores, realizado exclusivamente con ordenador, en el trabajo presentado por los matemáticos, Kenneth Appel y Wolfgang Haken de la Universidad de Illinois, quienes marcaron un hito en la historia de la evolución de las demostraciones matemáticas, al presentar una demostración realizada con la ayuda de una computadora, de una conjetura que había ocupado a los matemáticos durante más de un siglo.

Esto encendió la mecha de la polémica entre la comunidad matemática acerca de si era lícito aceptarla o no, ya que en ella había sido necesaria utilizar otros elementos, aparte de la razón humana, inclusive se atrevieron a vaticinar la muerte de las demostraciones matemáticas (De Lorenzo, 2000, pp. 401-404).

> La demostración con ordenador aparece como intrínsecamente inverificable y esencialmente falible: hay que admitir que la prueba con ordenador puede dar respuesta incorrecta sin que se tenga la posibilidad de determinar el lugar donde se produce el fallo. Como posibilidad de hacerla más plausible, elaborar otros programas que permitan obtener el mismo resultado, es decir, intentar la confirmación a través de otras demostraciones que también tendrán un error intrínseco […]

El catedrático Wolfgang Haken, en defensa de su demostración manifiesta (Courant, y Robbins, 2002, p. 544):

> Si aceptamos el teorema de los cuatro colores como teorema, nos vemos forzados a cambiar el sentido subyacente de la demostración.

La comunidad matemática se encuentra en un dilema, por un lado el ordenador potencializa de forma excelente el desarrollo de la matemática y, por otro, es considerado sólo como una herramienta auxiliar.

Análisis matemático

El análisis matemático en los orígenes del pensamiento abstracto no estaba definido, aunque lentamente se fue definiendo, con las aportaciones de grandes matemáticos. Una de las mejores referencias es la siguiente:

> La historia conocida del desarrollo de las matemáticas, cubre un periodo de casi siete mil años. El álgebra, la geometría y la trigonometría son de antiguo origen, y las contribuciones griegas a la geometría son conocidas por toda persona instruida. Los griegos veían a la matemática como una ciencia deductiva. Comenzaban con definiciones y axiomas claramente formulados, y por razonamiento lógico y prueba precisa elaboraron una teoría de la geometría, que demostró, para todos los tiempos el poder del pensamiento abstracto y condujo al hombre al descubrimiento de que a través de las matemáticas puede entender la naturaleza (Haaser Norman, B., Sullivan Joseph, A., 1976, pp. 5-6).

Fue Descartes[7] el primero en aplicar sistemáticamente el álgebra al estudio de la geometría. Cincuenta años más tarde Newton y Leibniz fundaron el cálculo diferencial e integral.

---

[7] Descartes, R. (1596-1650). A la aparición del *Discurso del Método* en 1637. Descartes proponía una duda metódica, que sometiese a juicio a todos los conocimientos de la época, aunque a diferencia de los escépticos, la suya era una duda orientada a la búsqueda de principios últimos sobre los cuales cimentar sólidamente el saber. El método cartesiano que Descartes propuso para todas las ciencias y disciplinas consiste, en descomponer los problemas complejos, en partes progresivamente más sencillas, hasta hallar sus elementos básicos. Descartes es considerado como el iniciador de la filosofía racionalista moderna. Por su planteamiento y resolución del problema de hallar un fundamento del conocimiento que garantice su certeza. En el área de matemáticas, la contribución más notable que hizo Descartes fue la sistematización de la geometría analítica (Descartes, R., 2013, pp. 10-15).

Los dos problemas centrales del cálculo son el problema de las tangentes y el problema de la cuadratura. El problema de las tangentes es encontrar las rectas tangentes a una curva, el problema de la cuadratura es determinar el área limitada por curvas. A Newton[8] y a Leibniz[9] se les llama los fundadores del cálculo, porque fueron los primeros en ver claramente la íntima relación entre estos dos problemas, a sus relaciones se les llama teoremas fundamentales del cálculo. Éste fue el comienzo del *Análisis* y dio un ímpetu a las matemáticas y a la ciencia que perdura en el presente.

Al referir el análisis matemático, indudablemente, debemos mencionar al matemático Bernard Bolzano,[10] él introdujo el concepto de función continua, de convergencia de series y mostró la existencia de funciones patológicas, como funciones continuas sin derivada.

Con Cauchy,[11] el análisis matemático se construye sobre unos cimientos firmes. Sus obras se caracterizan por la precisión de las definiciones, por ejemplo, el

---

[8] Newton, I. (1642-1727). Después de la publicación de los *Principia Mathematica* (seguramente el libro más influyente jamás escrito en el campo de la física), Newton había ascendido rápidamente en importancia pública. Fue nombrado presidente de la Royal Society, y se convirtió en el primer científico de todos los tiempos que fue armado caballero. Mantuvo una disputa con un contemporáneo, sobre la invención de una rama de las matemáticas llamada *Cálculo*. Finalmente fue recompensado con el puesto de director de la Real casa de la moneda (Hawking, S., 1993, pp. 229-230).

[9] Leibniz, G. W. (1646-1716). La invención del cálculo infinitesimal es atribuida tanto a Leibniz como Newton, en esta breve biografía no se dará seguimiento a la creación del cálculo por uno o por otro, se dará fe de lo que cada cual realizó en su momento. Leibniz empleó el cálculo integral para encontrar el área bajo la curva de una función $y = f(x)$. Además utilizó la $\int$ alargada, que es su legado matemático más perdurable. Una vez que se alcanzó una mejor comprensión de los conceptos de función y de límite, se hizo posible dar significados precisos a la definición de función continua, curva continua, continuidad de los procesos físicos y nociones de velocidad y direcciones instantáneas de un cuerpo en movimiento (Haaser, N., Lasalle, J. y Sullivan, J., 1976, p. 334).

[10] Bolzano, B. (1781-848). Matemático checo. En numerosas cuestiones se adelantó Bolzano a los analistas rigurosos del siglo XIX. En el concepto de función continua, en el criterio de convergencia de series, en la existencia de funciones continuas sin derivada, pero por haber publicado sus escritos de análisis en Praga, la influencia de sus ideas fue escasa (Pastor, J. R., y Babini, J., 1985, p. 155).

[11] Cauchy, A. L. (1789-1857). El siglo XIX fue la edad del rigor matemático, un movimiento creado para volver a proporcionar cuidadosas definiciones y rigurosas demostraciones. A la vanguardia de este movimiento estaba el matemático francés. Augustin Louis Cauchy (Stewart, J., 2012, p. 113).

concepto de función, de límite y de continuidad, y en la cuidadosa determinación del campo de validez de las fórmulas. Además, vuelve al concepto de integral como suma, al modo de Arquímedes, y no como una operación inversa del proceso de derivación.

La evaluación de los procesos en las demostraciones

Al realizar demostraciones matemáticas que conllevan en su proceso de solución partir de un supuesto, evaluar, validar y justificar las argumentaciones resulta en la mayoría de las ocasiones una ardua tarea, convencer a una comunidad matemática o en el peor de los momentos del quehacer argumentativo racional y lógico, convencerse a uno mismo es entrar en conflicto cognitivo hasta que una comunidad de matemáticos apruebe los procesos de demostración de teoremas, sólo entonces podrá decirse "he demostrado un teorema", tal como pasó con el último teorema de Fermat cuando el profesor Sir Andrew J. Wiles de la Universidad de Oxford, resolvió un problema matemático que traía en jaque a los matemáticos actuales, sin embargo no fue reconocido hasta que la comunidad matemática lo evaluó, lo validó y dio fe de las argumentaciones del profesor Wiles. La evaluación de los procesos conlleva tiempo, mucho tiempo, así mismo aceptar las argumentaciones para que formen parte del andamiaje que soporta el conocimiento matemático universal. La demostración de Wiles, publicada en la revista Annals of Mathematics, en 1995, contiene más de cien páginas. Incluso para un matemático especialista en teoría de números, su comprensión no es asunto fácil. Probablemente tendría que dedicar mucho tiempo y esfuerzo en comprender, analizar y evaluar las primeras páginas de Wiles, como lo menciona Rodríguez (2016, pp. 8-9). Godino y Recio (2001, p. 405), manifiestan que innegablemente se ha observado que en los últimos años existe un interés creciente en educación matemática por la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones, este interés parece ser justificado por el papel esencial de las situaciones y procesos de validación y evaluación en la propia matemática, quienes también creen que los estudios sobre la demostración matemática deben enmarcarse dentro de la problemática más amplia de la evaluación y desarrollo de las distintas prácticas argumentativas en diversos contextos institucionales.

Resulta relativamente sencillo de comprender cómo el conocimiento evoluciona, se modifica y cambia, cuando las verdades absolutas con el paso de los años se convierten en verdades relativas, tal como pasó con la física newtoniana, que funcionaba bien en la Tierra, pero en el espacio, más allá de los límites de nuestra comprensión, evolucionó con las teorías Einstenianas. Hasta que una comunidad de físicos teóricos y aplicados evaluaron, validaron y comprobaron las teorías de Einstein surgió el nuevo conocimiento. Kline (1980, p. 400) menciona:

> […] la corrección de las matemáticas debe ser juzgada por su aplicabilidad al mundo físico […] Son correctas en la medida que funcionan y, cuando no funcionan deben ser modificadas.

Alcolea (2002) considera que los logros matemáticos se deberían evaluar con el patrón de progreso antes que con la verdad absoluta.

> Ello significa que el conocimiento realmente matemático y sustancialmente distinto de los sistemas formales es revisable, corregible y mejorable por el uso heurístico de la evidencia informal (p. 31).

Dificultades en el estudio del análisis

Al aventurarse a realizar demostraciones, ineludiblemente se hace necesario el bagaje de conocimientos previos. La habilidad para trabajar con elementos matemáticos como las funciones, límites, continuidad, convergencia, diferenciación e integración, entre otros conceptos y representaciones matemáticas, debe formar parte de los conocimientos previo a hacer una demostración. Gran parte de los estudiantes y profesores que se aventuran a realizarlas no logran alcanzar su cometido. Debemos tener conciencia de que demostrar es el equivalente de querer hablar otro idioma, el verdadero idioma universal, el de las matemáticas verdaderas, el de las verdades matemáticas.

En el intento de mostrar la belleza y el poder de la matemática deductiva, algunas demostraciones dejan de lado elementos argumentativos, que podían sesgar el interés hacia las dificultades, que por ende surgen en un proceso de demostración, centrando la atención en los elementos básicos necesarios para concluir con éxito una demostración matemática.

A manera de analogía, diríase que, para realizar cualquier trabajo del ser humano, sea este artístico, manual, cognitivo, etcétera. Es necesario pasar por diferentes momentos, que llevarán desde el nivel de aprendiz hasta el de experto, en ese quehacer que uno se propone. Para jugar un juego, se hace necesario conocer las reglas y entonces se centra toda la atención para tratar de ganar ese juego, tal como lo menciona Solow (1993, pp. 9-10).

> De igual forma sucede en matemáticas. Al principio se necesita trabajar mucho para aprender las reglas fundamentales. De hecho su objetivo debe ser asimilar este material hasta que se convierta en algo muy conocido para usted. Entonces encontrará que su mente puede enfocarse hacia los aspectos creativos de las

matemáticas. Estas reglas no son substitutos para la creatividad, y este manual no tiene como finalidad enseñar cómo ser creativo.

El método de reducción al absurdo para demostrar teoremas matemáticos es un método muy recurrido por los matemáticos, que puede resumirse en tres momentos: Fase de inicialización. Uno sospecha que la proposición *P* es verdadera y procede a llevar su negación hasta sus últimas consecuencias lógicas. Para ello se parte de la ley del tercero excluido, la cual se presupone, es decir, queda implícito que la proposición es cierta, o bien es falsa, y no hay una tercera posibilidad.

Fase de investigación deductiva y experiencia nihilista. La negación de la proposición conduce a una contradicción.

Conclusión: En consecuencia, la proposición *P* es verdadera, porque su negación no puede serlo, conduce a una contradicción.

Este método de demostración en matemáticas, basado en el principio lógico de la transferencia deductiva de la verdad (desde las premisas a la conclusión) y en la ley del tercero excluido (otra explicación), procede de la siguiente manera:

I. Se quiere demostrar la proposición *"si p entonces q"*.

II. Se niega la proposición que se quiere demostrar, es decir se supone que es falsa. Se parte entonces de *"p pero no q"*.

III. Se inicia la cadena deductiva y se logra una contradicción al absurdo.

IV. Se concluye que, de acuerdo al principio de transferencia de la verdad, *"p pero no q"* no puede ser verdadera.

V. De aquí que, por el tercero excluido, *"si p entonces q"* es verdadera.

El método de reducción al absurdo es muy parecido al método de la prueba de hipótesis en estadística. Porque en éste, uno sospecha (o quisiera) que una cierta hipótesis *H,* es o fuese verdadera.

Pero lo que se somete a prueba empírica, es su negación $H_{0,}$ denominada hipótesis nula. Y si se logra mostrar que la hipótesis nula no puede sostenerse con la evidencia disponible, entonces ello conduce a aceptar la hipótesis alternativa *H,* que es precisamente lo que se quería.

Para ilustrar, consideremos los siguientes ejemplos de teoremas elementales:

Primer ejemplo: De un teorema elemental y su demostración.
Teorema: La $\sqrt{2}$ es irracional, entiéndase como el número que no puede escribirse como el cociente de dos enteros, definición escrita en Daintith (2001, p. 110).

O sea. (No existen ***m*** y ***n*** naturales tales que, $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$).

Solución por el Método de demostración: (Reducción al absurdo).[12]

Comencemos esta demostración suponiendo que $\sqrt{2}$ NO es irracional, si no es irracional debe ser obligatoriamente racional, y podrá representarse como el cociente de dos enteros de la siguiente manera $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

I. Supongamos que existen ***m*** y ***n,*** tales que
Tratando de explicar la racionalidad independientemente de que la representación esté en función de dos números elevados al cuadrado.

II. Supongamos también que ***m*** y ***n*** son primos entre sí *(no tienen divisor común),* también conocidos como números primos relativos *(no tienen factores comunes).*

III. Podemos suponer que el máximo común divisor de ***m*** y ***n*** es 1. Por tanto son primos relativos. Elevando al cuadrado.

Se sigue de I. Qué y $\frac{m^2}{n^2} = 2 \rightarrow m^2 = 2n^2$ de aquí que ***m*** es par

(porque si fuera non, hagamos $m=2k+1$, entonces $m^2=4k^2+4k+1$ y m^2 sería también non). Estableciendo la condición de número par o número non ya que no puede ser ambos.

[12] La Reducción al Absurdo es uno de los métodos más usados para hacer demostraciones matemáticas. Hipócrates demostró la fuerza del método indirecto. La idea es, suponer que la proposición que queremos demostrar es falsa, y a partir de esta suposición, usando deducciones matemáticas, llegar a una contradicción o algo absurdo, lo cual implica que nuestra proposición, será necesariamente cierta. A Zenón se le atribuye la invención de este método de demostración indirecto llamado reducción al absurdo en el siglo V a. C. (Morales-Santacruz, 2008, p. 12)

IV. Entonces $\boldsymbol{m^2}$ debe ser múltiplo de 2, lo que implica, que $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 2, es decir $\boldsymbol{m = 2k}$ para un cierto $\boldsymbol{k}$, sustituyendo este valor en la expresión anterior y simplificando se obtiene, en consecuencia $m^2 = (2k)^2 = 2k2 = 2n^2$ o sea $\boldsymbol{2k^2 = 2n^2}$ de aquí que n también es par.

V. Pero III y IV contradicen a II y entonces la negación del teorema es falsa; *(De algo verdadero matemáticamente no puede deducirse algo falso)* y así el teorema debe ser verdadero.

Dicho de otra manera la expresión nos asegura que n^2 es múltiplo de 2 por lo tanto también n lo será y aquí se manifiesta el absurdo ya que se había supuesto que *m y n* no tenían factores comunes es decir *(mcd (m, n) = 1)* y se ha llegado a que tanto m como n son múltiplos de 2, es decir que tienen al 2 como factor común y por tanto su *mcd* debe ser al menos 2. Esta es la contradicción que se buscaba, por lo tanto la $\sqrt{2}$ es irracional. *QED*.

A continuación se identifican algunas de las dificultades en el proceso de demostración que son de recurrente aparición y posteriormente se proponen las recomendaciones.

Primera dificultad: NO entender el significado del teorema *(¿Qué significa ?* $\sqrt{2}$ *¿Qué significa irracional?).*

Primera recomendación; Se debe verificar en el texto *(si lo tenemos en mente mejor)* el significado de cada uno de los conceptos matemáticos involucrados en el enunciado del teorema. Para ello es conveniente mantener *(construir si no se tiene)* un archivo de definiciones y tratar de aprenderlos de memoria *(esto evita perder tiempo consultando el significado)* también es conveniente adquirir la habilidad para traducir lenguaje matemático *(simbólico)* al lenguaje formal *(español)* y viceversa *(¿cómo se leen los siguientes símbolos matemáticos?* "$\exists\ n \ni n > x$").

Normalmente en el aprendizaje de las matemáticas, la recursión memorística es prueba superada, sin embargo para poder realizar demostraciones matemáticas, es una condición necesaria.

Segunda dificultad; Incapacidad para seguir el hilo de la demostración (el discurso matemático).

Segunda recomendación; Aprender los rudimentos de la lógica matemática y convencerse de la validez de los métodos de la demostración.

Tercera dificultad; Desconocer otros teoremas que se asocian en el argumento.

Tercera recomendación; Mantener un archivo de teoremas ya demostrados y aprenderlos de memoria si es posible (para aprender algo tenemos que saber algo).

Cuarta dificultad: Perderse en los detalles de la demostración (se ven los árboles, pero no se percibe el bosque).

Cuarta recomendación: Tratar de entender el plan (idea básica) de la demostración y supeditar los detalles a tal plan; generalmente el plan no se hace explícito en los textos, el estudiante y el lector deben esforzarse, para lograr realizar sus primeras demostraciones.

Quinta dificultad: Dificultades en la lectura de la simbología matemática (desconocer la pronunciación y las definiciones).

Cuarta recomendación: Tratar de leer algunas demostraciones básicas, se sugiere transcribir al lenguaje común demostraciones básicas (recordar que aprender el lenguaje matemático es una tarea muy parecida a aprender otro idioma).

Este primer ejemplo del método de reducción al absurdo, es la demostración del primer teorema elemental, que fue demostrado por Euclides hace más de 2000 años.[13]

Este segundo ejemplo es un teorema elemental, dados dos enteros, una condición y la solicitud de la demostración ante tales condiciones se procede a su demostración.

Segundo ejemplo. Teorema elemental y su demostración.

Teorema: Si m y n son enteros tales que $n+n^2+n^3+=m+m^2$, entonces n es par.
Solución: Supongamos que n es impar. A partir de esto debemos conseguir una demostración.

Como n es impar, entonces n^2 *y* n^3, son ambos impares, donde $n+n^2+n^3$ es impar (ya que es, la suma de tres impares). Entonces, como $m+m^2=n+n^2+n^3$, se tiene que $m+m^2$ es impar.

Sin embargo, $m+m^2$ es siempre par (ya que $m+m2=m(m+1)$ y necesariamente alguno de los números m o m+1 es par). Hemos llegado a una contradicción. De allí se tiene que n, es par. Que es lo que se quería demostrar por el método indirecto.

[13] La demostración griega clásica de la irracionalidad de la $\sqrt{2}$, recogida en los elementos de Euclides sigue siendo la más conocida y enseñada hoy en día, es de carácter aritmético (por cierto, clasificada en séptimo lugar entre los 24 teoremas más bellos según los lectores de la revista *The Mathematical Intelligencer*) (Casas, N., 2010, p. 18)

Capítulo II

Función. El concepto más significativo en el campo matemático

La historia nos muestra que epistemológicamente el concepto de función ha sufrido muchos cambios hasta llegar a lo que hoy conocemos como la definición formal del mismo. Resulta evidente de la exposición que hace Descartes de su método, que tenía una idea intuitiva de los evasivos conceptos, de *variable* y *función,* que son fundamentales para el análisis matemático (Bell, 1985, p. 151).

En la actualidad comprender el concepto de función a partir de referencias y definiciones de diccionario, es garantía de un conflicto cognitivo en los estudiantes de matemáticas al momento de estudiar y más al momento de aplicarlo. El concepto de lo que en el lenguaje de las matemáticas debe entenderse como función, es algo que se fue gestando, desde la matemática antigua, hasta la matemática contemporánea, de allí que tanto para los estudiantes, como para los profesores resulte una acción complicada de lograr, aprender y enseñar. Así lo manifiesta Sastre y Boubée (2008, pp. 141-155).

> El concepto de función no existía en la matemática antigua, no existía una idea abstracta de variable, las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos.
>
> Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos como: calor, luz, color, densidad, distancia, velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado. Las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes, pero sin dar definiciones específicas. Así la evolución de la noción de función, se dio asociada al estudio del cambio en particular del movimiento. Una función, en este periodo se definía, por una descripción verbal de sus propiedades específicas o mediante gráficos, aún no se usaban fórmulas.
>
> En el periodo moderno se produjeron sucesos fundamentales para el desarrollo del concepto de función, la extensión del concepto de número al de números reales, la creación del álgebra simbólica, la unión entre el álgebra y la geometría entre otros sucesos de igual importancia.

Sin tratar de realizar un cronograma de la evolución del concepto, si es imperativo manifestar, que fue en este periodo moderno donde Leibniz, se convierte en el primer matemático en utilizar la palabra *función.*

En este periodo surgen muchas definiciones del concepto de función, una de ellas la propuso Dirichlet:[14] "[…] *y* es una función de la variable *x,* definida

[14] Johann, P. y Lejeune-Dirichlet, G. (1805-1859). Matemático alemán, sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de números, prestando especial atención al estudio de las

en el intervalo $a < x < b$, si para todo valor de la variable *x* en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y además es irrelevante cómo se establece esa correspondencia".

Nicolás Bourbaki (Bonbal, 2011)[15] la definió como un conjunto de pares ordenados (una función del conjunto E en un conjunto F, se definió como un subconjunto especial del producto cartesiano, E x F).

Fueron muchas las definiciones del concepto de función que surgieron en la época moderna de la historia de las matemáticas, aunque todas las definiciones se centran en la correspondencia entre las variables, sean dependientes o independientes, todas tienden a manifestar matemáticamente la variación, el cambio, el movimiento, por eso es que la comprensión de este concepto se torna complicada en la actualidad, cada autor de libro de texto de análisis básico aporta su propia definición.

Otra característica que define la dificultad de este concepto radica en el carácter exponencial de sus acepciones, como lo define Dolores (1999, pp. 3, 13).

> Es muy difícil comprender nuestro mundo circundante si lo consideramos estático, sin cambio, de hecho no existe fenómeno en la naturaleza o en nuestra sociedad que escape al fenómeno del cambio. Nuestra vida cotidiana y el mundo que nos rodea son siempre cambiantes. En todos estos fenómenos hay siempre cosas que cambian. Esas cosas cambiantes identificadas como distancia, tiempo, temperatura, volumen, entre otras, pueden ser medidas y suelen llamarse magnitudes variables. A las relaciones entre esas magnitudes variables se les representa con fórmulas algebraicas, para obtenerlas es necesario identificar, lo que cambia y no cambia en esa relación. A la expresión algebraica de esas relaciones se le conoce como fórmula funcional o fórmula de una función.

---

series, aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series. En el campo del análisis matemático perfeccionó la definición y concepto de función y en mecánica teórica se centró en el estudio de equilibrio de sistemas y en el concepto potencial newtoniano (Elstrodt., J., 2000, p. 18).

[15] Bourbaki, N. (1930-1970). Realmente este matemático nunca existió. Es el seudónimo de un grupo de matemáticos franceses que se creó en la década de los 30 y que es el responsable de la publicación de un monumental tratado que, con el título de *Elements de Mathématique*, tenía como objetivo la exposición de forma sistemática y rigurosa, de las nociones y herramientas básicas para el desarrollo de toda la matemática. Es en este tratado que originalmente se llamaría tratado de análisis, donde aparece la definición que da Bourbaki, al concepto de función. (Bonbal, F., 2011, pp. 1-10).

La enseñanza del pre-cálculo y el cálculo, basada en las representaciones funcionales, es uno de los mayores retos que enfrentan los profesores de matemáticas. La noción de función es de difícil acceso conceptual para los estudiantes y profesores, todo esto se ha observado, en los resultados de investigaciones en estudios cognitivos, dentro de la matemática avanzada.

Quienes pretenden realizar demostraciones, deben comprender la esencia de las relaciones funcionales, sin dejar de visualizar la historia evolutiva de los conceptos en matemáticas.

Las siguientes interpretaciones del concepto de función son realizadas a partir de diferentes textos del nivel bachillerato.

Primero, como un ente numérico, es decir, encontrar $f(x)$ dado un valor particular de x. Lo que conlleva a una definición en términos de correspondencia entre valores de dos cantidades.

Segundo, como un modelo de predicción que relaciona cantidades, es decir, del cambio de x a $x + h$ a se infiere el cambio de $f(x)$ a $f(x + h)$. La consecuente definición se daría en términos de correspondencia entre variables x y h respectivamente.

Tercero, como un objeto en sí mismo, y por tanto susceptible de transformaciones, especialmente manipulaciones gráficas y analíticas. Así lo manifiesta Rosa María Farfán (2008), investigadora de Matemáticas Avanzadas.

Actualmente las investigaciones sobre el concepto de función en pre-cálculo se han proyectado en esencia sobre dos vertientes:

Primera: La indagación sobre los mecanismos que operan la transferencia entre los conceptos gráficos y analíticos. Bajo la premisa de que esa interrelación es ineludible, cognitivamente, para el estudio del análisis.

Segunda: A partir de las diferentes representaciones, su estudio y apoyo vía el uso de la tecnología y programas especiales en ordenadores como el *Wolfram Alpha* (muy popular entre los estudiantes de matemáticas avanzadas), el *Derive,* entre otros, inclusive las actuales *supercalculadoras graficadoras.*

Existen otras razones importantes que manifiestan las dificultades del aprendizaje de las ciencias básicas en las aulas de nuestras escuelas, por mencionar algunos aspectos que se relacionan con la forma, de cómo se da el aprendizaje en las personas; aspectos importantes como la interrelación con otras disciplinas, etcétera.

En los procesos de aprendizaje, la parte medular para el desarrollo efectivo de dichos procesos son también las características de los sujetos que aprenden (hábitos de lectura, autodidactismo, etcétera), la metodología implementada en el aula, la formación del profesor que por una parte quizá sea experto en ciencias con alto dominio de las matemáticas y un nulo dominio de la docencia y pedagogía o viceversa, el contexto en el que se ubica el proceso de aprendizaje que puede no ajustarse a las necesidades de los contenidos, las redes sociales que la mayoría de las ocasiones se apropian de la voluntad de los quehaceres del pensamiento, que en materia de ciencias básicas se requieren, de tal manera que se forma una gama de posibilidades que se le pueden presentar al alumno hacia el logro de su aprendizaje y gestarse con estos elementos una barrera que le detendrá en su meta de alcanzar una formación profesional con el desarrollo de habilidades cognitivas, sin siquiera darse cuenta de ello.

Transformar ese concepto, en el racional científicamente más amplio, con grado de aplicación en situaciones del quehacer científico no es tarea fácil para los profesores. Por una parte los contenidos en los textos del nivel medio superior, lo reducen en la mayoría de los casos a un concepto de diccionario, que lejos de ser eso, los profesores deberían ampliar el tiempo para su aprendizaje, pues no se alcanza usualmente una satisfacción con la definición que se consigue en dichos textos del nivel medio superior y superior del cálculo de los infinitésimos.

Capítulo III

Límites

En matemáticas aún existen conceptos que no están definidos entre ellos precisamente el de límite, en el lenguaje común puede entenderse la definición de límite, como el principio o final de algo, sin embargo en matemáticas el concepto es mucho más complejo, sobre todo cuando se trata de funciones con denominador cero o cuando se trabaja con irracionales.

Se dice que una sucesión a_n tiene como límite el número L si a_n se acerca a L, tanto como se quiera tomando a n lo suficientemente grande. Ejemplo: la sucesión $1/n$ tiene como límite 0.

En general el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un número a es el punto L si la distancia entre $f(x)$ y L es arbitrariamente pequeña tomando la x lo suficientemente cercana a a.

O dificultades específicas como el tratamiento de los límites singulares (Navarro, C., 2007, p. 232).

> El tratamiento escolar de los límites singulares $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ (x)}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 0} \frac{1\text{-}\cos(x)}{x} = 0$,
>
> inicia en el ciclo de educación media superior, más específicamente en el primer curso de cálculo diferencial e integral. En las demostraciones matemáticas no suele exigirse un alto rigor matemático. Incluso en algunos planes de estudios se afirma que dichos límites deben ser abordados hasta llegar a la universidad debido a la complejidad que ellos representan […]llama la atención la diversidad de formas en que se presentan las demostraciones de estos límites, ya que la mayoría ofrece una alternativa formal donde se exige la combinación de conocimientos básicos de matemáticas en el manejo de fórmulas elementales, de trazos geométricos y de identidades trigonométricas, sin embargo constituyen una dificultad al momento de demostrarlos.

Acercamiento al concepto de límite

En la vida cotidiana la noción de límite, generalmente la asociamos, con el final o comienzo de algo, los límites de nuestra propiedad, los límites de nuestra fuerza, los límites de nuestro vocabulario, los límites de la imaginación, entre otras referencias, esto conlleva a entender como límite, el comienzo o final de algo.

En matemáticas este concepto involucra entender el comportamiento de una función cuando la variable independiente está “muy cerca” de un número dado, pero sin llegar a tomar ese valor.

Límite de una función, si *f* es una función decimos que si el valor de *f(x)* se hace próximo a un número L cuando "x" se aproxima más y más al valor de *a*. La definición formal de límite, según Larson y Hostetler (2006, p. 52).

> Definición formal de límite: Si f(x) se hace arbitrariamente próximo a un número L, cuando x se aproxima hacia "a" por ambos lados decimos que el límite de f(x), cuando x tiende al valor de a, es L y escribimos la siguiente referencia matemática para ello.
>
> $\lim_{x \to a} f(x) = L$

De lo escrito anteriormente sobreentenderemos dos cosas:

Una: Que existe el límite y que el límite es L.

Dos: Si el límite de una función existe, es único.

Evaluar límites de funciones, para estudiantes de bachillerato puede ser sencillo, pues se reduce a una sustitución de una variable por un valor numérico, operar algebraica o aritméticamente y obtener un número.

Por ejemplo, al evaluar el $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$, ya que x^2 se hace próximo a 9 cuando "x" se acerca más y más al valor de 3.

Sin embargo, para matemáticas superiores esto no es tan simple, ya que existen funciones que por su clasificación no permiten procesos algorítmicos tan simples, es cuando se entra en el campo del análisis matemático.

Entre los diversos conceptos que se presentan en el cálculo infinitesimal, el de límite es, muy importante, y quizás de los más difíciles de adquirir. Lo que se va a definir en este segundo acercamiento, no es la palabra *límite,* sino la noción de función que tiende o se acerca hacia un límite.

El análisis matemático moderno utiliza un método especial, que fue elaborado en el transcurso de muchos siglos, y constituye ahora su instrumento básico, la referencia es el método de los infinitésimos, o lo que en esencia es lo mismo, de los límites.

La función *f* tiende hacia el límite *l* cerca *a* si se puede hacer que *f(x)* esté tan cerca como se quiera de *l* haciendo que *x* esté suficientemente cerca de *a,* pero siendo distinto de *a*... de tal manera que *f(x)* esté próximo de *l* cuando *x* esté próximo a *a,* pero distinto del valor de *f.*

Definición. Sea *f* una función definida en *(a,b)*, excepto quizás en x_0. La función *f* tiende hacia el límite *L* en *a.* Significa: Que el límite de *f* en x_0 existe, y es igual a *L* si, si y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo *x* si, $0 < | x - x_0 | < \delta$, y $x \in (a,b)$ implica que $| f(x) - L | < \varepsilon$, tal definición obedece a la siguiente representación gráfica (Arizmendi y Carrillo, 1990, p. 116):

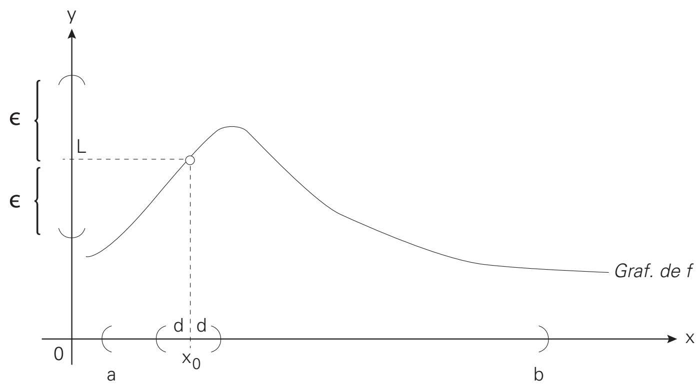
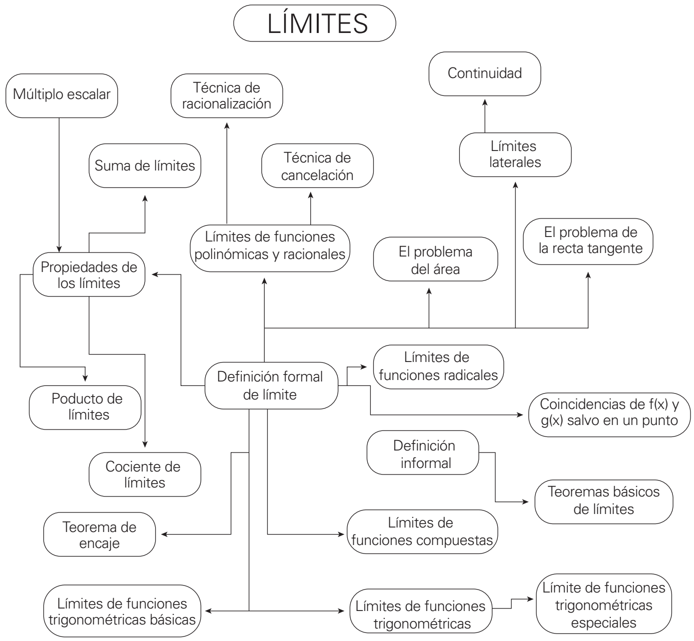


Diagrama de límites

El siguiente diagrama representa la relación del concepto de límite con diferentes teoremas, al tratar de unir dos teoremas, se presenta un conector en forma de flecha, que significa *se necesita para demostrar.* Por ejemplo, si queremos demostrar, sumas de límites, necesitamos conocer las propiedades de los límites, y a su vez, para las propiedades de los límites necesitamos conocer la definición formal de límite.



Nota: La flecha indica "se necesita para demostrar"
Fuente: Elaboración propia

Axiomas de orden desigualdades

En matemáticas, una desigualdad es una relación de orden que se da entre dos valores cuando estos son distintos. Si los valores dados son elementos de un conjunto ordenado, como los enteros o los reales, entonces pueden ser comparados.

Cuando es tal la comparación, se cumple la ley de tricotomía, que es una propiedad de los números reales, donde dados dos números reales *a, b* cualesquiera se satisface una y solamente una de las siguientes condiciones: $a < b$, $a > b$, *o* $a = b$. Dicho en otras palabras, donde al ser comparados dos números, solo sucede una y solamente una de tres situaciones, la primera es que un número es mayor que el otro; segunda, un número es menor que el otro y tercera, que el número sea igual al otro.

> Además de una lista de reglas básicas, que rigen el comportamiento de estos elementos bajo estas operaciones (algunos sinónimos de regla, son axiomas, postulados, propiedades y teoremas) aquí el termino relación se define intuitivamente como la comparación entre los elementos del sistema de los números reales que se lleva a cabo entre un par de ellos a la vez.
>
> La estructura de cualquier sistema matemático tiene reglas, al igual como el sistema de los números reales, también conocidas como axiomas de orden. Los axiomas de orden nos ayudarán, a partir del concepto intuitivo de número positivo, a definir las relaciones "mayor que" y "menor que" desde el concepto de número positivo, donde sobre entiende que R+ es un subconjunto de los R (Prado, S., p. 253).

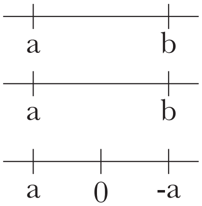
Axiomas que surgen de la ley de Tricotomía:

Axioma 1. (Tricotomía)[16] $\forall\, a \in \Re$, $a = 0 \vee a > 0 \vee a < 0$

Axioma 2. (La suma de positivos es positiva) $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0$

Axioma 3. (El producto de positivos es positivo) $a > b \wedge b > 0 \Rightarrow ab > 0$

Definiciones:



$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

$a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$

[16] La ley de Tricotomía manifiesta que para cada par de número reales "a" y "b" se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones, a < b, a > b *o* a = b. (Soto, E., 2011, p. 160).

De estos axiomas se desprenden algunas consecuencias, de la definición de orden en los números reales y de los axiomas anteriores se tienen las siguientes definiciones y propiedades muy útiles en la solución de inecuaciones (desigualdades).

Definiciones:

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

$a < 0 \Leftrightarrow - a > 0$

$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$

$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$

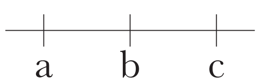
Propiedades:

Las siguientes propiedades son consecuencia de la ley de Tricotomía. La transitividad, la cancelación, suma de desigualdades, la multiplicación por un positivo no altera la desigualdad y la multiplicación por un negativo invierte la desigualdad.

Todas estas propiedades tienen su justificación teórica, por ejemplo la propiedad de transitividad que dice:

> La propiedad de transitividad tiene su aplicación en dos categorías; la transitividad de igualdad y la transitividad de desigualdad. De acuerdo con la transitividad de igualdad, si dos números son equivalentes al mismo número, entonces todos los números son equivalentes entre sí. La transitividad de la desigualdad trata con cuatro sub-partes correspondientes a; mayor que, menor que, mayor o igual que y menor o igual que las desigualdades.

Propiedad 1. (Transitividad) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$



Demostración: $a < b \wedge b < c$ es equivalente a $(b - a) > 0 \wedge (c - b) > 0$ por definición.

Ahora bien, como la suma de positivos es positivo, se tiene que $b - a + c - b > 0$, de aquí que, $c - a > 0$, o que $c > a$ por definición.

Para la propiedad de cancelación para la adición en desigualdades, lo ideal es partir de la hipótesis $a < b \Rightarrow a + c < b + c \; \forall \, c \in \Re$, y mediante una cadena de implicaciones, llegar a la conclusión $a < b$ utilizando el método directo, para construir esta cadena en la cual se deben utilizar exclusivamente los axiomas reales y las hipótesis del teorema.

Propiedad 2. (Cancelación) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \; \forall \; c \in \Re$

Demostración: $a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow b - a + c - c > 0 \hookleftarrow$

$b + c - 1a - 1c > 0 \; b + \underbrace{c - 1 \; (a + c)}_{\text{por axioma de distributividad}} > 0 \hookleftarrow b + c > a + c \Leftrightarrow a + c < b + c$

Para la propiedad suma de desigualdades solo se suman las desigualdades que tienen el mismo sentido, es decir < con <, > con >, también > con ≥, pero no < con ≥.

Propiedad 3. (Suma de desigualdades).

$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Demostración: $a < b \wedge c < d \Leftrightarrow b - a > 0 \wedge d - c > 0 \Rightarrow \hookleftarrow$

$b - a + d - c > 0 \Leftrightarrow b + d - (a + c) > 0 \Leftrightarrow b + d > a + c$

En esta demostración lo recomendable es utilizar, el inverso multiplicativo y de allí utilizar el inverso aditivo, de manera tal que si $c^{-1} > 0$ y viceversa entonces utilizar el método directo. Con la finalidad de construir una cadena de implicaciones de la demostración, utilizando exclusivamente los axiomas de los reales y las hipótesis del teorema.

Propiedad 4. (La multiplicación por un positivo no altera la desigualdad)

$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$

Demostración: $a < b \wedge c > 0 \Leftrightarrow b - a > 0 \wedge c > 0 \Rightarrow \hookleftarrow$

$(b - a) \, c > 0 \Rightarrow bc - ac > 0 \Leftrightarrow bc > ac$

En esta propiedad lo ideal es aprovechar el hecho de que si $c < 0 \rightarrow -c > 0$ y utilizar el axioma de orden que establece que al multiplicar una desigualdad por un positivo, ésta mantiene. De la misma manera, formar la cadena de implicaciones como en las propiedades anteriores.

Propiedad 5. (La multiplicación por un negativo invierte la desigualdad)

$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

Demostración: $a < b \wedge c < 0 \Leftrightarrow b - a > 0 \wedge -c > 0 \Rightarrow \hookleftarrow$

$(b - a) \, (-c) > 0 \Leftrightarrow -bc - a \, (-c) > 0 \Rightarrow ac > bc$

El valor absoluto

El valor absoluto de x es una medida del tamaño de x sin tener en cuenta que x sea positivo o negativo. El valor absoluto de un número es siempre un número real no negativo (Ayra, J. y Lardner, R., 1992, p. 100).

$$\text{Definición: } |x| = \begin{cases} x & si \ x > 0 \quad \text{(Consideración primera, no modifica al número, si es NO negativo).} \\ -x & si \ x < 0 \quad \text{(Consideración segunda, le cambia de signo, si es negativo).} \end{cases}$$

Teorema 1. $|x| = |-x|$ (Nada cambia si cambiamos el signo, al número dentro del valor absoluto).[17]

Demostración: Considerando los dos casos de la definición.

Caso 1.
$$\boxed{\begin{array}{ccc} x \geq 0 & \Longleftrightarrow & -x \leq 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ |x| = x & & |-x| = x \end{array}}$$

Caso 2.
$$\boxed{\begin{array}{ccc} x < 0 & \Longleftrightarrow & -x > 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ |x| = -x & & |-x| = -x \end{array}}$$

Teorema 2. $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} \quad si \ x \neq 0$ (El valor absoluto del recíproco de un número es el recíproco del valor absoluto del mismo).

Demostración:

Caso 1.
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{1}{x} > 0 & \Longleftrightarrow & x > 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} & & \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} \end{array}}$$

Caso 2.
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \frac{1}{x} < 0 & \Longleftrightarrow & x < 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \left|\frac{1}{x}\right| = -\frac{1}{x} & & \frac{1}{|x|} = \frac{1}{-x} \end{array}}$$

[17] En matemáticas el valor absoluto de un número, es su valor numérico, sin tomar en cuenta su signo sea este positivo (+) o negativo (-) (Ayra, J. y Lardner, R., 1992, p. 100).

Teorema 3. $|xy| \leq |x|\ |y|$ (El valor absoluto de un producto, es el producto de los valores absolutos de los factores)

Demostración:

Caso 1. $\boxed{\begin{array}{l} xy \geq 0 \iff x, y \text{ son de } = \text{ signo} \\ \\ |xy| = xy \iff 0 < xy = |x|\ |y| \end{array}}$

Caso 2. $\boxed{\begin{array}{l} xy < 0 \iff x, y \text{ son de } \neq \text{ signo} \\ \\ |xy| = -xy \iff 0 < -xy = |x|\ |y| \end{array}}$

Desigualdad del triángulo

La desigualdad triangular es llamada de esa manera debido a que la suma de las longitudes, de dos lados de un triángulo, es siempre mayor a la tercera longitud, o dicho de otra manera cualquier lado de un triángulo, es siempre menor que la suma de los otros dos; de la geometría euclidiana.

Teorema 4. (Desigualdad del triángulo). Para cada par de números reales xy se cumple la desigualdad $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Demostración primera: (Desigualdad de la derecha). Por simple inspección se manifiesta que:

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\} \text{Justifique estas dos desigualdades}$$

¿Sumando ambas desigualdades? (Demuestre que es válido sumar dos desigualdades) se obtiene:

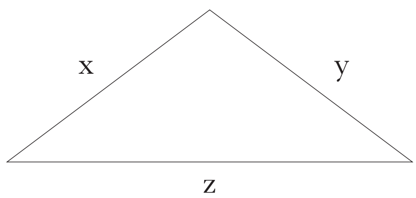
$- |x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$ De aquí que: $|x + y| \leq |x| + |y|$

Demostración segunda: (Desigualdad de la izquierda).

Sea $a = x + y$, $b = -y$. Entonces.
$|a + b| = |x + y - y| = |x| \leq |x + y| + |y|$, y así $|x| - |y| \leq |x + y|$
Si ahora $a = x + y$, $b = -x$ se tiene que:
$|a + b| = |x + y - x| = |y| \leq |x + y| + |x|$, y así $-|x| + |y| \leq |x + y|$ por lo tanto $||x| - |y||$ como se quería.

Comentario: la desigualdad del triángulo es fundamental en muchos teoremas sobre límites y continuidad (sobre todo la desigualdad derecha). Su uso sigue el esquema siguiente:
si $x \to 0$, $y \to 0$ entonces $x + y \to 0$ Porque, $|x + y \leq |x| + |y||$ y tanto como se pueden hacer tan pequeños como se quiera, lo mismo debe ser cierto de $x + y$.

El nombre de la desigualdad proviene del hecho de que cuando *x*, *y*, son números complejos (o vectores bidimensionales), y forman un triángulo, por conocimiento básico se sabe, que con la unión de tres lados se forma un triángulo, "si y solo si" la suma, de cualquier par de lados, de ese triángulo, es mayor que el tercer lado.[18] Ver siguiente figura de construcción básica triangular.



$x + y > z$
$x + z > y$
$y + z > x$

Límite de un cociente

El límite de un cociente, cuando las funciones son racionales no presenta un grado de dificultad, que los estudiantes de ciencias o ingenierías no puedan resolver, tal como lo manifiesta la propiedad de funciones de Casteleiro, que dice: "El límite de un cociente es el cociente de los límites de las funciones *f(x) / g(x)*" (Casteleiro, 2006, p. 55).

Pero cuando en estas funciones, se presentan condiciones en el denominador que no permiten cálculos inmediatos o estos conducen a indeterminaciones, inexistencia de límites, o dificultades en el cálculo, se hace imperativo recurrir a técnicas especiales, para el cálculo de los límites.

[18] En un triángulo que se encuentra en un plano, la suma de las longitudes de dos de sus lados, siempre es más grande, que la longitud del tercer lado. (Soto. E. 2011, p. 38).

Las reglas básicas permiten estudiar de manera más fácil, los límites y la divergencia de cualquier función racional, lo que nos da la oportunidad de aplicar en las demostraciones dichas reglas. Debe quedar claro que toda función racional, es la restricción a su conjunto, de definición de una función *f* del tipo considerado, cuando en el denominador se presenta una indeterminación o el denominador es cero.

Lema: $f(x) \to L \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{L}$ *(si* $x \to a$*)*

Demostración:

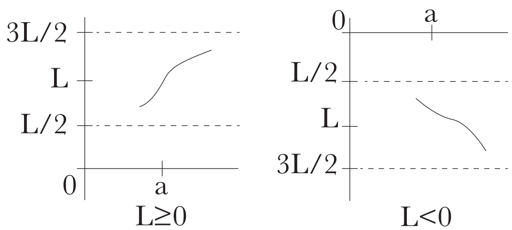
$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - f(x)}{Lf(x)}\right| = \frac{|f(x) - L|}{|L|\,.\,|f(x)|} \leq \frac{|f(x) - L|}{|L|\,.\,|L|/2} \hookleftarrow$$

$$= \frac{2}{|L|^2}|f(x) - L| \to 0 \;\; si \;\; x \to a$$

$\frac{|f(x) - L|}{|L|\,.\,|f/2|} =$ Esto se justifica así: Por hipótesis $(f(x) \to L$ existe una vecindad de a en la cual,

$\left|f(x) - L < \frac{L}{2}\right|$ O sea $-\frac{|L|}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$, por lo tanto, $|f(x)| > \frac{|L|}{2}$, en una vecindad de a.

Vea la siguiente figura.



Teorema 5. El límite de un cociente, es el cociente de los límites.

$$(f(x) \rightarrow L \wedge g(x) \rightarrow M \neq 0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{L}{M}, \ si\ x \rightarrow a$$

Demostración:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \underbrace{f(x)}_{\rightarrow L} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{\rightarrow \frac{1}{M}} \rightarrow \underbrace{L \cdot \frac{1}{M}}_{Teorema\ 6}, \ \frac{L}{M}, \ si\ \ x \rightarrow a$$

Producto de límites

En el diagrama de límites para poder trabajar con el producto de los límites, se necesita conocer las propiedades de los límites y a su vez se necesita conocer la definición formal de límite, esta cadena de condicionamientos conlleva a la formación de elementos matemáticos no aislados sino dependientes unos de otros, cuyo dominio permite, realizar este tipo de demostraciones matemáticas.

El límite de un producto es el producto de los límites, se principia con los lemas 1 y 2 sean:

Lema 1. $\lim\limits_{x \rightarrow a} f(x) = L$ Si entonces $\lim\limits_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.[19]

Demostración: Por hipótesis,

$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni |f(x) - L| < \epsilon\ \ si\ \ |x - a| < \delta$, pero esto equivale a decir que:

$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni |\mathrm{f(x)} - \mathrm{L} - 0| < \epsilon\ \ si\ \ |x - a| < \delta$, en otras palabras, $f(x) - L \rightarrow 0\ si\ x \rightarrow a$.

Lema 2. Si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \ \wedge \ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \ \ entonces \ \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$ [20]

[19] Esta demostración, es menos formal pero más intuitiva, que el análisis ϵ/δ. Nota: Traducción de Muñoz, J., 1990.

[20] Esta demostración, es menos formal pero más intuitiva, que el análisis ϵ/δ. Nota: Traducción de Muñoz, J., 1990.

Demostración:

$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) . g(x)| < \epsilon$, para ello arreglamos que:

$\left| f(x) \times g(x) \right|$, Como sigue,

$|f(x) . g(x)| = |(f(x) - L + L)\, g(x)| = (|f(x) - L|) + |L|)\, g(x)| \leq |f(x) - L|\, |g(x)| \hookleftarrow$

$+ |L|\, g(x)| = (|f(x) - L| + |L|) \underbrace{g(x)}_{\text{aquí está la clave}}| < (\epsilon_1 + |L|)\, \epsilon_2 = si\ |x - a| < \delta_1 \wedge |x - a| < \delta_2\, |g(x)|$

Aquí está la clave, pues se puede hacer tan pequeña como se desee por hipótesis.

$\delta_1\, \delta_{2.}$ Existen por las hipótesis del teorema.

Por lo tanto, si escogemos ϵ_1 (al cual le corresponde un δ_1), se tiene que,

$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\ \ \delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$, tal que, $|f(x)\, g(x)| < \epsilon\ si\ |x - a| < \delta.$

(Porque entonces $\epsilon_2 = \dfrac{1}{1 + |L|}$, para el cual corresponde $\delta_2 > 0$)

Teorema 6. El límite de un producto, es el producto de los límites.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L, \lim\limits_{x \to a} f(x) = M\ \ entonces\ \lim\limits_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = LM.$

Demostración:

$f(x) . g(x) = (f(x) - L + L)\, g(x) = (f(x) - L)\, g(x) + Lg(x) \hookleftarrow$

$= \underbrace{(f(x) - L)}_{A} \underbrace{g(x)}_{B} + L\underbrace{(g(x) - M}_{C} + M) \hookleftarrow = (f(x) - L)\, g(x) + L(g(x) - M) + LM \to 0 + 0 + LM = LM$

(Si $x \to a$)

A $\to$ 0 por Lema 1.

B $\to$ M por hipótesis.

C $\to$ 0 por Lema 1.

A y B $\to$ 0 por Lema 2.

Teoremas adicionales de límites

Este último apartado sobre teoremas de límites incluye las demostraciones de:

- El límite del recíproco de un número.
- El teorema de la preservación del signo en límites.
- El teorema de acotación de límite.
- El límite de una función compuesta.

Se han demostrado algunos de los teoremas básicos de límites, sin embargo se hace necesario, complementar con otros teoremas ya que la finalidad, es que el lector tenga a la mano la mayor cantidad de teoremas y sus demostraciones, que le permitan ampliar sus conocimientos sobre el tema.

Límite del recíproco de un número

Dado un número *(n)* su recíproco es *(1/n)*, análogamente para una sucesión de números reales, a una función $f: \to$, $n \to f(n) = x_n$ de manera recurrente es simplemente denotada por $\{x_n\}$, la función recíproca de *(f)* está denotada por (f^{1}). Sea el siguiente teorema.

Teorema 7. $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}\ (0 \neq a) \in \Re$

Demostración: $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \delta$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|(x-a)|}{|x| \cdot |a|} < \frac{|x-a|}{|a| \cdot |a| 2} = \frac{2|x-a|}{|a|^2} < \in \quad si \quad |x-a| < \frac{a^2 \in}{2} = \delta$$

La desigualdad intermedia se justifica de la siguiente manera (la idea fundamental es acotar a x, en una vecindad de *a);* por una vecindad de a digamos:

$$|x-a| < \left|\frac{a}{2}\right| se\ cumple \left|\frac{a}{2}\right| + a < x < \left|\frac{a}{2}\right| + a.\ Si\ a > 0$$

$$\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2};\ Si\ a > 0,\ \frac{3a}{2} < x < \frac{a}{2}$$

De esta manera $|x >| \frac{a}{2}$, en esa vecindad.

Límite de la raíz enésima de un número

La raíz *n-ésima* de un valor dado, cumple que cuando se multiplica n veces se obtiene el valor inicial. Así:

$\sqrt{a}\ x\ \sqrt{a} = a$ La raíz cubica se multiplica tres veces por sí misma para obtener el valor inicial.

$\sqrt[3]{a}\ x\ \sqrt[3]{a} = a\ x\ \sqrt[3]{a} = a$ La raíz *n-ésima* es lo que se multiplica n veces para obtener el valor inicial.

$\sqrt[n]{a}\ x\ \sqrt[n]{a} = a\ x \ldots x\ \sqrt[n]{a} = a$ Dado el siguiente teorema. El límite cuando x tiende a, *a* de la raíz *n-ésima* de *x,* es igual a la raíz *n-ésima* de *a.*

Teorema 8. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (n \in \aleph,\ a > 0)$

Demostración:

$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| = \left|x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}\right| = \left|x^{\frac{1}{n}}\right|\left|1 - (a/x)^{\frac{1}{n}}\right| = \left|x^{\frac{1}{n}}\right|\left|1 - r\right|$, donde $r = (a\ /\ x)^{\frac{1}{n}}$. Esto sugiere sumar la serie geométrica,

$$\frac{1 - r^{n}}{1 - r} = 1 + r + r^{2} + \ldots + r^{n-1}$$

(Nótese que $r^{n} = \frac{a}{x}$, y de aquí $1 - r^{n} = 1 - a/x = \frac{x - a}{x}$ no olvide que el objetivo en este tipo de demostraciones es despejar $|x - a|$. De la siguiente, forma;

$$\left|x^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n}}\right| \quad \left|x^{\frac{1}{n}}\right| \frac{\left|1 - r^{n}\right|}{\left|1 + r + r^{2} + \ldots + r^{n-1}\right|} \left|x^{\frac{1}{n}}\right| \frac{\left|1 - \frac{a}{x}\right|}{\left|1 + r + r^{2} + \ldots + r^{n-1}\right|} \hookleftarrow$$

$$= \frac{|x - a|}{\left|x^{\frac{n-1}{n}}\right|\left|1 + (a\ /\ x)^{\frac{1}{n}} + (a\ /\ x)^{\frac{2}{n}} + \ldots + (a\ /\ x)^{\frac{n-1}{n}}\right|} \hookleftarrow$$

$$= \frac{|x - a|}{\left|x^{\frac{n-1}{n}} + a^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-2}{n}} + a^{\frac{2}{n}} x^{\frac{n-3}{n}} + \ldots + a^{\frac{n-1}{n}}\right|} \leq \frac{x - a}{a^{\frac{n-1}{n}}} < \in$$

Si $|x - a| < a$, pues $|x - a| < a \Leftrightarrow 0 < x < 2a$ y al sustituir $x = 0$ en el denominador este se hace menor y por eso el cociente es menor.

Por lo tanto $\forall \in > 0\ \exists\, \delta > 0 \ni \left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| < \in$ *si* $|x - a| < \delta = min\left\{\in a^{\frac{n-1}{n}},\ a\right\}$

Después de ver el límite de una función compuesta, la demostración de los teoremas 7 y 8 se percibe más simple.

Preservación del signo en límites

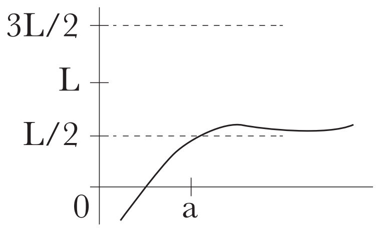
La preservación del signo en su lema manifiesta que si una función es continua en un punto, en el que su imagen es positiva, puede encontrarse en el entorno de dicho punto, en el que se verifica que la imagen de cada punto del entorno es otro número positivo.

Teorema 9. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$

Si entonces existe una vecindad de a en la cual $f(x) = L > 0 \ \forall x \neq a$, en la vecindad. Demostración: Por hipótesis $\forall > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \in$. En particular para $\in = \frac{L}{2}$ debe existir una $\delta > 0 \ni |f(x) - L < \frac{L}{2}$ *Si* $|x - a| < \delta$. Es decir.

$+\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}$ *Si* $|x - a| < \delta$ Como $L > 0$, $f(x)$ es positiva en $(a - \delta, a + \delta)$ como se quería.

Nótese: Que la función no puede llegar a de repente, tiene que tender a poco a poco. Ver la siguiente figura:



Teorema del apretón

Este teorema es uno de los pocos teoremas en matemáticas que se conoce por un sin número de referencias, puede ser identificado como el teorema del emparedado, de encaje, de estricción, de acotamiento, del sándwich, inclusive como el teorema del ladrón y los dos policías, entre otras definiciones. Este teorema es muy importante en el análisis matemático, es utilizado para encontrar el límite de una función a través de la comparación con otras dos funciones cuyos límites son conocidos o fácilmente calculables.

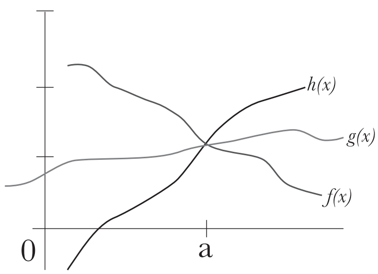
Teorema 10. Si las funciones *f, g, h* están definidas en alguna vecindad (excepto posiblemente en *a*) y son tales que, $f(x) \leq g(x) \leq g(x)$ $\forall$ x en la vecindad, entonces se cumple que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = L$$

Demostración: En este teorema se desea demostrar que:
$\forall \in > 0 \exists \delta > 0 \ni |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \in$. Sea dado $\delta > 0$

Por hipótesis $\exists \delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0 \exists |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \in \hookleftarrow$.
y $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \in$. Si tomamos $\delta = min \{\delta_1 \ \delta_2\}$, entonces
$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \in \wedge |h(x) - L| < \in$
En otras palabras
$L - \in < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \in$ Si $|x - a| < \delta$. $|g(x) - L| < \in$ Si $|x - a| < \delta$.
Pero esto equivale a decir $|g(x) - L| < \in$ Si $|x - a| < \delta$. que:
$g(x)$ queda en medio de $f(x)$ y $h(x)$.

Ver la siguiente figura



Además este teorema puede ser extendido a cualquier función con dominio en R^n (De Burgos, 1995, pp. 32, 33).
Sean *f, g,* y *h* tres funciones definidas en D que satisfacen.

I $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$

II $\lim_{\substack{x \to a \\ x \to b}} (x, y) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \to b}} h(x, y) = L$

Entonces
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \to b}} f(x, y) = L$$

Teorema de acotación del límite

El teorema de acotación de límites se denota como, si f es una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado, entonces la imagen de f es otro intervalo cerrado y acotado. La condición de cerrado del conjunto garantizará que el límite siga estando en el conjunto. Será de destacar como es fundamental que el intervalo de partida sea, simultáneamente cerrado y acotado para lograr que la imagen también lo sea, de tal manera que las funciones continuas en general no llevan intervalos acotados en intervalos acotados ni intervalos cerrados en intervalos cerrados. Sea el siguiente teorema:

Teorema 11. Si está definida en un intervalo abierto I que contiene al punto (excepto posiblemente en ese punto). Si además, $\exists M$ para el cual hay un $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq M$ si $|x - a > \delta|$ entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq M$ Si tal límite existe.

Demostración: El teorema de acotación del límite es una consecuencia inmediata del teorema de preservación del signo en límites, y uno de los lemas utilizados en el teorema del límite de un producto. Véase la siguiente ecuación:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L > M \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - M) > 0 \Rightarrow f(x) - m > 0 \Longleftrightarrow f(x) > 0$$

Corolario: Este método de prueba se denomina "por contraposición" bajo el siguiente esquema, se niega la tesis y de ahí se deduce la negación de la hipótesis. Se basa en la tautología: $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\approx q \Longleftrightarrow \approx p)$.

Demostración: Alternativa (Por reducción al absurdo). Es imposible que $f(x) = L > M$ porque tomando $\in < L - M$, debería existir un $\delta > 0$ tal que:
$M < f(x) < 2L - M$ si $a < \delta < x < a + \delta$ y se logra una contradicción pues hemos encontrado una vecindad de en la cual $f(x) > M$.

Teorema límite de una función compuesta

Dadas dos funciones cualesquiera f y g, sea x un número en el dominio de g y encontramos su imagen en $g(x)$, si este número $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos calcular el valor de $f(g(x)$. Observe que la salida de una función, se usa como entrada para la próxima función.

El resultado es una nueva función $h(x)=f(g(x))$ obtenida mediante la sustitución de g en f y se llama la composición o compuesta de f y g, y se denota por $f \circ g$ ("f círculo g"). Apreciación según (J., Stewart, 2012, p. 40).

Al aplicar los límites a las funciones, o sea al tratar de evaluar la variable se obtiene el valor al que tiende la función, tal como en el siguiente teorema, se deduce su demostración:

Teorema 12. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, y f es continua en b, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} f(gx) = f\,(\lim\limits_{x \to a} g(x))$.

Demostración: Se quiere demostrar que:
$\forall \in > 0$ $\exists\ \delta > 0 \ni |f(g(x)) - f(b)| < \in$ *si* $|x - a| < \delta$. Como f es continua en b, dado $\in > 0$ $\exists\ \delta > 0$, tal que $|f(g(x)) - f(b) < \in$ *si* $|g(x) - b| < \delta|$. Pero para esta δ se puede encontrar un $\delta > 0$, tal que $|g(x) - b < \delta|$, *si* $|x - a < \delta|$, porque $g(x) \Rightarrow b$.
Así, $|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \delta \Rightarrow f(x) - f(b) < \in$. Nota: El lector deberá memorizar el teorema de la siguiente forma: Si f es continua, el operador de límite puede introducirse al argumento.

Capítulo IV

Continuidad

El concepto de continuidad, cuya definición informal para una función puede determinarse como: Una función continua en un punto, es aquella que no da saltos (no hay interrupciones entre un punto y otro, del espacio definido por la sucesión finita de puntos cuyos valores extremos se conocen), dicho de otra manera, aquella representación lineal que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel (recordemos que estas demostraciones son para el cálculo de una variable real).

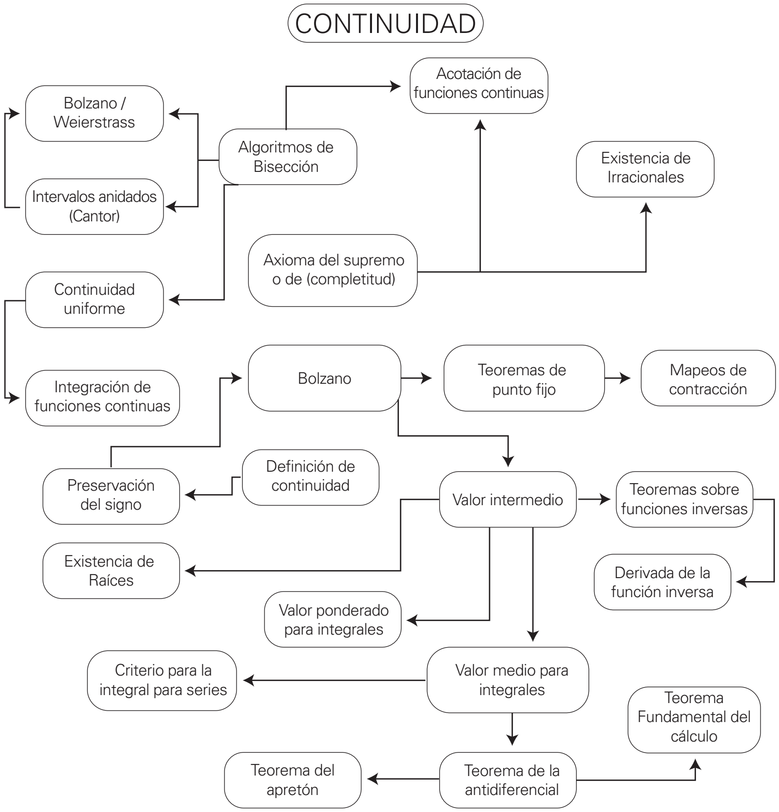
Definición formal de continuidad; La función *f(x)* se llama continua para $x = \xi$ (o en el punto ξ), si:

1. Dicha función está determinada en el punto ξ, es decir, existe el número $f(\xi)$.
2. Existe y es finito, el $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Realizando la sustitución. $x = \xi + \Delta\xi$
Donde $x = \xi + \Delta\xi$ se puede escribir la condición 1 de la forma.
$\lim_{\Delta\xi \to 0} \Delta f(\xi) = \lim_{\Delta\xi \to 0} [f(\xi + \Delta\xi) - f(\xi)] = 0$, es decir, la función *f(x)* es continua en el punto ξ, cuando, y solo cuando, en este punto, a un incremento infinitésimo del argumento corresponde un incremento infinitésimo de la función. (Baranekov y Demidovich, 1967, p. 36).

En este apartado de continuidad, se verán las demostraciones, del axioma del supremo, así como la propiedad Arquimediana de los números reales y los principios de continuidad de los números reales. Además de las equivalencias entre los principios de continuidad.

Diagrama de continuidad



Nota: La flecha indica "se necesita para demostrar"

Aproximación al concepto de continuidad

Pueden encontrarse aproximaciones al concepto de continuidad (Arizmendi, y otros, 1987), cuya definición es:

> Una función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ si para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ satisface la propiedad siguiente $f(x) \cong f(x_0)$ para todo x suficientemente próximo a x_0 [P]
> Una función cuyo dominio es $\mathbb{R}$ es continua en un punto si satisface la propiedad [P]
> Una función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ es continua en un punto x_0 si para cada regla ε puede encontrarse una regla δ para la cual:
> $f(x) \cong f(x_0)$ según la regla ε, para todo según la regla δ para la cual:

Las expresiones anteriores aparecen términos vagos como, «*aproximadamente igual a*» y «*suficiente próximo*» por ello no podemos considerarlas definiciones. Sin embargo, es posible considerarlas como los primeros intentos por establecer las definiciones de función continua en $\mathbb{R}$ y función continua en un punto.

El axioma del supremo (implicaciones inmediatas)

Axioma del Supremo. Todo conjunto de números reales no vacío y acotado por arriba, tiene un supremo.
Definición. Un número $k \in \Re$ se denomina supremo de $S \neq 0$ si, k es la menor de la cotas superiores de S, esto es que k' es cota superior de S entonces $k' \geq k$, a tal número se le denomina *Sup(S)*, siempre que exista (Laguardia, 2014, p. 12).
Cota superior: Si $S\ C\, \Re$ una cota superior de es un S, es un $C \in \Re \ni C \geq s \forall \in S$.

Además existen otras definiciones del Supremo como: Se define como la mínima cota superior.

En otras palabras, el supremo de un conjunto S, de números reales, es un número real, que es mayor (o igual) que cualquier número en el conjunto, porque está muy cerca del conjunto (por ser la mínima cota).

En la mayoría de los casos el supremo de un número es un número del conjunto, por ejemplo (en el intervalo cerrado [3,5] el supremo es el 5) pero en otros no pertenece a él (el conjunto $\{-1/n; n \in \aleph\}$, tiene como supremo el 0).

Si $\mu = \sup (S)$, $\mu \geq s$, $\forall \ s \in S$, (por ser μ cota superior).

Si existe Supremo de un conjunto es único.

Todo subconjunto real, no vacío acotado superiormente, tiene un supremo.

Dicho de otra forma. No existe un $s \in S$ tal que $s > \mu$. 1ª consecuencia.

Además por ser μ la mínima cota superior, si $v < \mu$ entonces v no es cota superior de y, en consecuencia, debe existir un $s_0 \in S$, tal que $v < s_0$.

En otras palabras: Si $v < \mu$, entonces, $\exists s_0 \in S$ tal que, $v < s_0$. (2ª consecuencia).

Propiedad Arquimediana de los números reales

El axioma del supremo asegura que cualquier conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente tiene cota superior mínima. La propiedad Arquimediana de números reales es una importante consecuencia de este axioma.

$\forall x \in \Re \, \exists \, n_x \in \aleph \rightarrow n_x > x$ Para todo número real, existe un natural que es mayor.

Propiedad Arquimediana. Si *si* $r < s$ entonces existe $m \in \Re$ tal que $r < m < s$. (Delgado, p. 164).

Demostración: (por contradicción). Si tal n_x no existiera entonces x sería cota superior de $\aleph$, (porque x sería mayor que cualquier natural), y de aquí que $\aleph$ debería tener un supremo μ. Pero esto es imposible pues $\mu - 1 < \mu \rightarrow \exists\, n_{,} \in \aleph \rightarrow n_1 > \mu - 1$ (por la segunda consecuencia). Pero esto significa que $\mu < n_1 + 1$, y se ha logrado la contradicción.

Corolarios[21] de la propiedad Arquimediana

$\forall y.z \in \Re^+$

a) $\exists\, n \in \aleph \ni ny > z$. En palabras cualquier longitud z por grande que sea, se puede medir con una regla por pequeña que sea.

b) $\exists\, n \in \aleph \ni 0 < 1/n < z$. En palabras: No existe el número positivo más pequeño; o bien, hay números racionales arbitrariamente pequeños.

c) $\exists\, n \in \aleph \ni n - 1 \leq y < n$. Cualquier número positivo está entre dos naturales o bien es un número natural.

Teorema 13. Existencia de $\sqrt{2}$ $\quad \exists\, x \in \Re^+ \ni x^2 = 2$

Demostración: Sea $S = \{y \in \Re;\ 0 \leq y\ y^2 \leq 2\}$. S es acotado superiormente por 2. Porque de otra manera $\exists\, y \in S \ni y > 2$ y entonces $4 < y^2 \leq 2$ CONTRADICCIÓN.

Pero entonces S tiene un supremo $x > 0$ (no puede ser cero porque $1 \in S$).

Es más x^2 porque: Si

a) $x^2 < 2$,

Si $(x + 1/n)^2 = x^2 + 2x/n + 1/n^2 \leq x^2 + 2x/n + 1/n$ ↵

$$= x^2 + \frac{2x+1}{n} < x^2 + \underbrace{2 - x^2}_{>0 \text{ por hipótesis}} = 2$$

Escogiendo n suficientemente grande. Pero ello significa que $x + \dfrac{1}{n} \in S$, lo cual es imposible porque $x = \sup(S)$

b) Si $x^2 > 2$,

$x^2 > 2, \exists\, s_0 \in S \ni s_0 > x + 1/m$, (por ser mínima cota superior). De aquí que

$s^2_{\ 0} > x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} \quad x^2 + \frac{2x}{m} \quad 2$, (escogiendo m suficientemente grande), pero esto

contradice el hecho de que $s_0 \in S$.

---

[21] Del latín *corollarium,* proposición que no necesita prueba particular y se deduce con facilidad de lo demostrado previamente (RAE.es).

Principios de continuidad de los números reales

Desde los griegos se conoce que los números racionales, no bastan para medir cantidades ($\sqrt{2}$ no es racional, aunque para todo propósito práctico podemos decir que es 1.4142). Ello hace necesario ampliar el concepto de número de forma que exista una correspondencia biunívoca entre los números y los puntos de una recta, los siguientes principios de Dedekind, Cantor, Weierstrass, y Cauchy aseguran tal correspondencia y se puede demostrar que son equivalentes.

Principio de Dedekind.[22] Si el conjunto de los números reales se divide en dos conjuntos no vacíos X y Y sin elementos en común de forma que para $x \in X$, $y \in Y$ arbitrarias, se cumple que $x<y$ entonces existe un único número ξ (la frontera) para el cual $x \leq \xi \leq y$, cualquier que sea $x \in X$, $y \in Y$ (O sea, toda cortadura tiene una frontera).

Principio de Cantor. Todo sistema de intervalos encajados (anidados) $[a_n, b_n]$genera un único número real que pertenece a cada uno de los intervalos.

Principio de Weierstrass. Toda sucesión de números reales no decreciente y acotada superiormente es convergente.

Principio de Cauchy. Toda sucesión de Cauchy es convergente.

Una sucesión de Cauchy o (fundamental) es una sucesión.

$$\{x_n\} \ni \forall \in > 0\ \exists \mathcal{N} \ni \forall n, p \in \aleph \,|\ _{n+p} - x_n| < \in$$

En otras palabras, después de un *n,* lo suficientemente grande los elementos de la sucesión están arbitrariamente cercanos.

Axioma del supremo

Todo conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, posee un supremo (o mínima cota superior). En otras palabras si un conjunto de números tiene una cota superior, entonces tiene una mínima cota superior.

[22] Dedekind, J. W. R. (Matemático alemán 1831-1916). Estudió en la Universidad de Gotinga, donde tuvo como profesor a Gauss, C. F. Desarrolló el método denominado corte de Dedekind, mediante el cual definió un número irracional, en función de las propiedades relativas, de las dos particiones de elementos, en que este dividía el continuo de los números reales. (Hawking. S. 2010, p. 781).

Equivalencia entre los principios de continuidad

A continuación se demostrará la equivalencia entre los principios de continuidad según la siguiente figura:

Equivalencia entre el principio de continuidad / Dodekind Axioma del supremo

Demostración: Sea E un conjunto de números reales acotado por arriba y no vacío. El plan de prueba consiste en formar una cortadura basada en E de tal manera que la frontera de ella sea el supremo de E. Formemos el conjunto de números reales X y Y de la siguiente manera:

Ponemos x en X, si $\exists e \in \mathrm{E} \ni e \geq x$, (en palabras, todos los reales que no estén a la derecha de los E ponemos en x lo cual incluye a E mismo y a todos los reales a la izquierda de E. Nótese que $\mathrm{E} < X$.

De otra manera, ponemos a x en Y (o sea, si $x > e \forall e \in \mathrm{E}$, $x \in Y$).

Nótese que Y consiste de todas la cotas superiores de E.

Por construcción, entonces dado un $x \in X$, $y \in Y$, se tiene:

i. $\exists e_0 \in \mathrm{E} \ni x \leq e_0$

ii. $\exists e_0 \in \mathrm{E} \ni y > e \forall e \in \mathrm{E}$

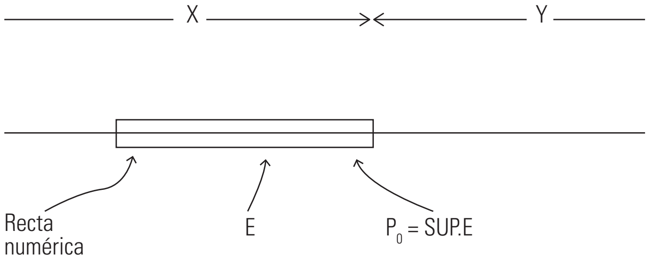
En consecuencia $x < y$ es decir X , Y, forman una cortadura.

Se sigue de lo anterior que X , Y, tienen una frontera e_0 o una $\exists e_0 \ni x \leq e_0 \leq y$, pero e_0 debe ser el supremo de E, pues:

i. e_0 es cota superior de E $e \in \mathrm{E} \Rightarrow e \in X \Rightarrow e \leq e_0$.

ii. e_0 es la mínima cota superior (pues $e_0 \leq y \forall y \in Y$).

iii. Ver la ilustración de la siguiente figura.



Equivalencia entre el principio de continuidad / Weierstrass Dodekind

Demostración: Supongamos los números reales divididos en dos conjuntos disjuntos X y Y tales que $x < y$, para todo $x \in X$, $y \in Y$. Se demostrará que esta cortadura tiene una única frontera ξ.

Sea $m \in Z$ y $n \in \aleph$ y defínase la sucesión x_n como:

$x_n = \max_{m \in Z} \left\{ \frac{m}{2^n} ; \frac{m}{2^n} \in X \wedge \frac{m+1}{2^n} \in Y \right\}$ Antes de continuar la prueba nótese que esta extraña forma de definir, una sucesión se basa en la idea de Cantor de maximizar un número irracional a través de un sistema de intervalos anidados, que es un método numérico muy conocido por quienes hacen demostraciones matemáticas. Para fijar ideas tomemos la $\sqrt{2}$ como la frontera y formemos la cortadura

$X = \{x;\ x^2 < 2\}$; $Y = \{y;\ y^2 < 2\}$; entonces:

$x_1 = \underbrace{\max}_{m \in Z} \left\{ \frac{m}{2} ; \frac{m}{2} \in X \wedge \frac{m+1}{2} \in Y \right\} = \underbrace{\max}_{\in Z} \left\{ \frac{m}{2} ; \left(\frac{m}{2}\right)^2 < 2 \wedge \left(\frac{m+1}{2}\right) > 2 \right\}$ $x_1 = 1$ con $m=2$ o sea

$1 < \sqrt{2} < 3/2$ porque, $(1<2<9/4)$.

$x_2 = \underbrace{\max}_{m \in Z} \left\{ \frac{m}{4} ; \frac{m}{4} \in X \wedge \frac{m+1}{4} \in Y \right\} = \underbrace{\max}_{\in Z} \left\{ \frac{m}{4} ; \left(\frac{m}{4}\right)^2 < 2 \wedge \left(\frac{m+1}{4}\right) > 2 \right\}$ $x_2 = 5/4$ con $m=5$ o sea

$1.25 < \sqrt{2} < 1.5$.

$x_3 = \underbrace{\max}_{m \in Z} \left\{ \frac{m}{8} ; \frac{m}{8} \in X \wedge \frac{m+1}{8} \in Y \right\} = \underbrace{\max}_{\in Z} \left\{ \frac{m}{8} ; \left(\frac{m}{8}\right)^2 < 2 \wedge \left(\frac{m+1}{8}\right) > 2 \right\}$ $x_3 = 11/8$ con $m=11$ o sea

$1.35 < \sqrt{2} < 1.5$.

$x_3 = \max \left\{ \frac{m}{13} ; \left(\frac{m}{16}\right)^2 < 2 \wedge \left(\frac{m+1}{16}\right)^2 > 2 \right\} = \frac{22}{16} = \frac{11}{8}$, *etc.*

Obsérvese que la ley de formación de la sucesión asegura que:

x_1, está a menos de un medio $\left(\frac{1}{2}\right)$ de distancia de Y.

x_2 ,está a menos de un medio $\left(\frac{1}{4}\right)$ de distancia de Y.

Así sucesivamente…

x_n,está a menos de $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ de distancia de Y.

Para concluir tómese que:

$M_n = \left\{x;\ x = \frac{m}{2^n}\right\}$, para algún pues, $m \subset \left\{x;\ x = \frac{m}{2^{n+1}}\ \textit{algún}\ m\right\} = M_{n+1}$ pues,

$\left(x \in M \Leftrightarrow x = \frac{m}{2^n} = \frac{2m}{2^{n+1}} \Rightarrow x \in M_{n+1}\right)$

En consecuencia $x_n \leq x_{n+1}$ (porque el máximo en x_n está más restringido que el de x_{n+1}): De modo que x_n pero también está acotada, pues cualquier elemento de Y, es cota superior. Según Weierstrass debe tener un límite ξ.

Equivalencia entre el principio de continuidad / Axioma del supremo Weierstrass

Demostración: (La intención es demostrar que el supremo de la sucesión es su límite).

Sea $\{x_n\}$ una sucesión no decreciente y acotada por arriba. Por el axioma del supremo $\exists\, x_0 \ni x_0 = sup\{x_n\}$. Probaremos que $x_0 = \lim\limits_{x \to \infty} x_n$.

i. $x_0 \leq x_n \forall n$ (por ser x_0 cota superior).

ii. $\exists\, n_0 \in \aleph \ni \forall \in x_0 - \in < x_{n0} \leq x_0$ (por ser x_0, máxima cota superior; porque si no hubiera tal, no se tendría $x_0 - \in \geq x_n \forall n\ y\ x_0 < \in$ será cota superior. Imposible pues x_0 es la mínima).

iii. $x_0 - \in < x_{n0} \leq x_{n0+1} \leq \ldots \leq x_0$ (por ser no decreciente).

En consecuencia $\forall \in > 0 \exists\, n_0 \in \aleph \ni$ si $n \geq n_0$ se tiene $x_0 - \in < x_n \leq x_0 < x_0 + \in$. Pero esta es precisamente la definición de una sucesión.

Equivalencia entre el principio de continuidad / Weierstrass Propiedad Arquimediana

$(\forall a>0 \text{ y } b \text{ reales } \exists n \in \aleph \ni na>b)$

Demostración: (Método usado, reducción al absurdo: Se niega el teorema y se llega a una contradicción.)

Supóngase que se cumple el principio de Weierstrass pero no la propiedad Arquimediana. Entonces $\exists a>0 \ni \forall n \in \aleph$, $na \leq b$ es decir, la sucesión $\{na\}$ está acotada superiormente por b y es no decreciente.

Según Weierstrass, debe tener un límite, digamos b_0.

Es decir $\forall \in>0 \exists n_0 \ni n \geq n_0 \Rightarrow |na-b_0|<\in$ si tomamos $\in=\frac{a}{2}$ se tiene que

$-\frac{a}{2}< na-b_0<\frac{a}{2} \forall n \geq n_0$. En otras palabras $b_0-\frac{a}{2}<na<b_0+\frac{a}{2}$.

Sumando a en la desigualdad de la izquierda se tiene $na+a = a(n+1)>b_0+a/2>b_0$ En otras palabras $x_{n+1}>b_0$. Un absurdo porque b_0 es el supremo de la sucesión.

Continuidad de funciones

En el estudio de las funciones continuas se verifican propiedades importantes las cuales establecen la base de la propiedad de completitud de los números $\mathbb{R}$, esta propiedad es la que distingue al cuerpo de los reales de otros cuerpos ordenados como el de los racionales. Se recomienda, tener en mente la definición de continuidad de una función, dada anteriormente (una función se denomina continua en un intervalo, si tal función es continua en cada punto del intervalo).

Definición: Una función f definida en una vecindad de un punto a, es continua en a sí, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Nótese que, de acuerdo con la definición de límite, definiciones alternativas de continuidad son:

Si f, es continua en a si $\forall \in>0 \, \exists \delta>0 \ni |f(x)-f(a)|<\in$ siempre que $|x-a|<\delta$.

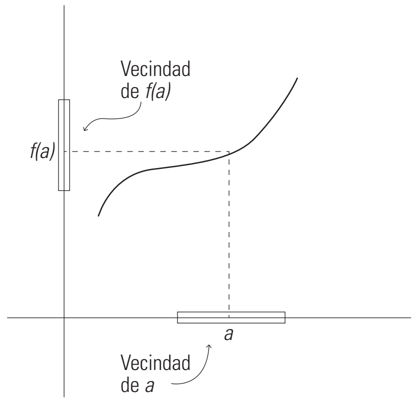
O en términos de vecindades:

f, es continua en si para toda vecindad $V(f(a),\in)$ de $f(a)$ existe una vecindad $V(a,\delta)$ de a para la cual:

$x \in V(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in V(f(a),\in)$.

Intuitivamente esto significa que:

f, es continua en a si puede "acercarse" a $f(a)$ tanto como se quiera (a una $\in>0$), tomando a x suficientemente cercana a $a(\delta>0)$. Ver figura siguiente.



Funciones continuas. Ejemplos

Ejemplo 1. $f(x) = x^2$, es continua en todo punto de su dominio.

Demostración: Tómese un punto genérico x_0 , y analícese la distancia entre $f(x)$ y $f(x_0)$ donde x es algún otro punto.

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x^2_0| = |x - x_0|\,|x + x_0|$$

El método para demostrar la continuidad a partir de la definición $\in/\delta$ es tratar de despejar la distancia entre x y x_0. Como se desea encontrar una vecindad de x_0 no se pierde generalidad si se restringe a la x a moverse en la vecindad de (x_0-1, x_0+1).

Por tanto:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|\,|x + x_0| \le |x - x_0|\,[|x| + |x_0|]\hookleftarrow$$: Por la desigualdad del triángulo.

$$\le |x - x_0|\,[|x_0 + 1 + |x_0|]\hookleftarrow$$, tomando el mayor valor para x.

$$= |x - x_0|\,[2|x_0| + 1] < \in.$$

$$\text{Si } |x - x_0| < \frac{\in}{2|x_0| + 1} = \delta.$$

Ejemplo 2. $f(x) = sen\ x$ es continua en $\Re$.

Demostración:

$$|f(x) - f(x_0)| = |sen\ x - sen\ x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\ sen\ x\frac{x+x_0}{2}\right| \hookleftarrow$$

$$\leq 2\left|sen\frac{x-x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0| < \in\ \ si\ \ |x-x_0| < \in = \delta.$$

Ejemplo 3. $f(x) = sen\frac{1}{x}$ es continua en $(0,1)$.

Demostración:

$$\left|sen\frac{1}{x} - sen\frac{1}{x_0}\right| \leq \left|\frac{x_0-x}{x.x_0}\right| < \in\ \ si\ |x-x_0| < \in |x.x_0| < \in |x_0| = \delta\cdot$$

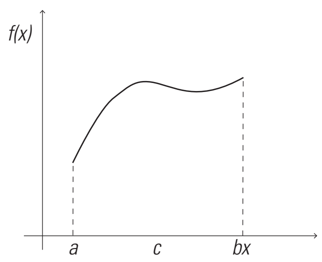
Funciones continuas. Teoremas

Casualmente en el lenguaje matemático y en el lenguaje común la definición de continuidad coincide, como lo menciona Stewart: un proceso continuo es uno que se lleva a cabo gradualmente, sin interrupción o cambio brusco. Toda función continua en un intervalo cerrado, alcanza su mínimo y su máximo ahí.

Una función es continua en un intervalo si es continua en cada punto de ese intervalo.

Demostración: (Mediante el método de bisección, se va "acorralando" al máximo en intervalos cada vez más pequeños).

Dividamos el intervalo $[a,b]$ en el cual la función es continua por su punto medio c y hagamos, $I_1 = [a,b]$. Ver siguiente figura.



Si el máximo está en $[c,b]$, hacemos $I_2 = [c,b]$.

De otra manera $I_2 = [a,c]$.

Dividamos ahora el intervalo por su punto medio y continuemos su proceso.

El algoritmo asegura que, en la etapa *n,* no hay ningún x_1 fuera de I_n para el $f(x_1) \geq f(x)\ \forall x \in I_n$ cual o sea que el máximo, por construcción, está en I_n. En otras palabras, asegura que:

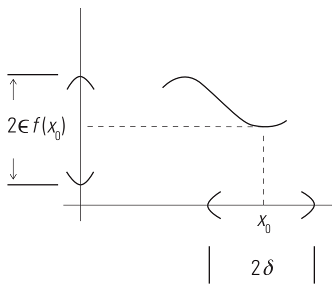
$$\exists\, x \in I_n \ni \forall x," \notin I_n \quad f(x) \geq f(x\ ).\ (*)$$

Sea, entonces x_0 el punto común a los intervalos anidados $I_1 \supset I_2 \supset$.

Demostremos que $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$. Como en todas las demostraciones de aseveraciones casi obvias; la prueba es contradicción.

Supongamos, por contradicción, que $\exists\, x_1 \in [a,b] \ni f(x_1) > f(x_0)$ y sea $E = f(x_1) - f(x_0)$.

Como f es continua debe existir un $\delta > 0 \ni |f(x) - f(x_0)| < E$ en la vecindad de δ de x_0. Ver siguiente gráfica.



Pero si tomamos *n* suficientemente grande, a_n y n_n están en tal vecindad. Es decir $I_n = [a_n, b_n]$ está contenido en la vecindad de δ de x_0. Por tanto $f(x) - f(x_0) < f(x_1) - f(x_0) = E\ \forall x \in [a_{n,} b_n]$

O, lo que es lo mismo, $f(x) < f(x_1)\ \forall x \in [a_n b_n]$. Pero esto contradice la condición (*) del algoritmo de bisección, porque tiene una imagen “por arriba” de las de aquellas x en I_n.

Si $x \in I_n$ Podemos tomar un , todavía más grande y dejarla fuera.

Comentario: Como en cualquier otra disciplina, los conceptos de las matemáticas forman un sistema, en el sentido de que hay una dependencia entre ellas. El lector debe tener una clara conciencia de esta relación si desea lograr, un conocimiento adicionado de las matemáticas. Este teorema, es un botón de muestra de tal relación. Para demostrarlo se necesita conocer los conceptos de:

i. Algoritmo de bisección e intervalos anidados.
ii. Continuidad de una función.
iii. Métodos de Prueba de lógica matemática.
iv. Vecindades.
v. Máximos y mínimos de una función.
vi. Entre otros conceptos.

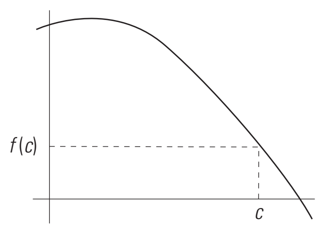
Preservación del signo

Sea f continua en c con $f(c)>0$. Entonces existe una vecindad de c para la cual $f(x)>0$.

En otras palabras se quiere decir que si una función es continua en un punto en el que su imagen es positiva, podremos encontrar un entorno de dicho punto en el que se verifica que la imagen de cada punto del entorno es otro número positivo.

Demostración: Como f es continua en c, a los puntos cercanos a les corresponden imágenes cercanas a $f(c)$. Pero como $f(c)>0$ puede tomar puntos lo suficientemente cercanos a $f(c)$ para que sean positivos, digamos $\frac{1}{2}f(c) <$ y $\frac{2}{3}f(c)$

y a esto le debe corresponder una vecindad de c como contra imagen. Ver siguiente figura.



2

Formalmente: Sea $E=\frac{1}{2}f(c)$ (positiva por hipótesis).

Como f es continua en c debe existir un $\delta>0$ tal que $|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<E$.
En otras palabras:

$$-\frac{1}{2}f(c)<f(x)-f(c)<\frac{1}{2}f(c) \quad si\ |x-c|<\delta$$

O sea $\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c) \;\; si \;\; |x\text{-}c| < \delta$

Es decir, $f(x)$ es positiva en $c - \delta < x < c + \delta$

La prueba del teorema usa únicamente la continuidad de la función.
El manejo teórico de la idea de continuidad, es importantísimo para muchos teoremas. El lector debe tener en mente la definición de continuidad en sus diferentes versiones (vecindades, $\in/\delta$, intuitiva) y después comprenderla mejor (para esto la idea intuitiva es independiente).

Teorema de Bolzano[23]

Aparentemente obvio en palabras de su creador, donde deja su demostración por esa característica tan poco cuestionable, este teorema tuvo que ser redescubierto por matemáticos contemporáneos, sin embargo el respeto al origen está plasmado en cada una de las acepciones del teorema que usan todos aquellos matemáticos que lo redescubrieron y que lo renombraron teorema de Bolzano.

Sea f continua en $[a,c]$ con $f(a)<0$ y $f(b)>0$. Entonces, $\exists c \in (a,b) \ni f(c) = 0$.

Demostración: (El supremo del conjunto cuyas imágenes son negativas en el punto c que se busca).

Sea $S = \left\{x \in [a,b]; f(x) \leq 0\right\}$

i. S Es no vacío, pues $f(a)<0$, y en consecuencia $a \in S$.

ii. S Es acotado, pues $S \subset [a,b]$.

Por lo tanto, por el Axioma de Completez, debe tener un supremo.

Sea $c = sup\ S$.

i. $f(c)$ no puede ser positiva porque entonces, por el "teorema de preservación del signo", existiría un $\delta > 0$ tal que $f(c)\text{-}\ \delta > 0$. (De hecho toda una vecindad alrededor de tiene esa propiedad, si $c < b$).

Por lo tanto no hay elementos de S a la derecha de $c < \delta$ imposible. Porque $c = sup\ S$ y por lo tanto la mínima cota superior de S y resulta que $c - \delta$, es mínimo.

ii. $f(c)$ no puede ser negativa, porque igual que antes, existiría una vecindad de alrededor de c y de radio $\delta > 0$ tal que $f(x)$ para x en tal vecindad. En particular $f(x + \delta) > 0$. Contradicción.

[23] Nota histórica: En la historia de las matemáticas abundan los descubrimientos simultáneos. Este es el caso de Bolzano, B. (1781-1848) y de Cauchy, A. L. (1789-1848) que hicieron trabajos muy similares en la aritmetización del cálculo, las definiciones de límite, derivada, continuidad y convergencia (Bosch, G., 1993).

Porque $c + \delta$ estaría en S y es mayor que c.
En consecuencia, según la ley de tricotomía, la única posibilidad es $f(c) = 0$.
El uso teórico de conjuntos es crítico en esta demostración; Para practicar el lector debe resolver los ejercicios 6 y 7 propuestos en este capítulo.

Teorema del valor intermedio

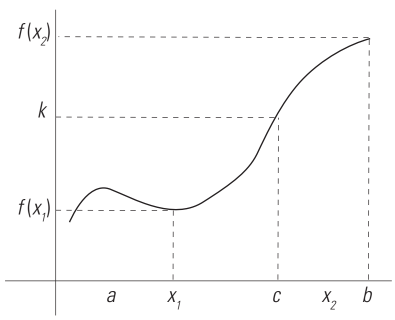
En la mayoría de los libros de cálculo en los que aparece el teorema del valor intermedio se tiene el enunciado del teorema, que en el lenguaje común quiere decir que si existe una función continua en un intervalo cerrado y existe un número n en ese intervalo, entonces existe otro número c en el intervalo cerrado tal que $f(c) = n$ parece ser muy evidente, sin embargo, su demostración nos ubica en la realidad cognitiva de este teorema.

Sea f continua en $[a,b]$. Entonces, para cualquier par de puntos $[x_1 < x_2]$ del intervalo $[a,b]$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$, f toma cada valor entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ para algún punto de x_1, x_2.

Demostración: Supóngase $f(x_1) < f(x_2)$ y tómese un $k \in (f(x_1), f(x_2))$, la idea consiste en trasladar el eje x hasta k y aplicar el teorema de Bolzano. Para ello, defínase la función $g(x) = f(x) - k$ en (x_1, x_2):

i. Y, g es continua porque es la diferencia de dos funciones continuas.
ii. Cumple las condiciones de Bolzano;
- $g(x_1) = f(x_1) - k < 0$ pues $f(x_1) < k$
- $g(x_2) = f(x_2) - k < 0$ pues $f(x_2) < k$

Por lo tanto, según Bolzano, debe existir un $c \in (x_1, x_2)$ para el cual $g(c) = 0$, pero esto significa $f(c) - k = 0$ o sea $f(c) = k$. Ver la siguiente figura.



Para cada k entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ existe un $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = k$.

Comentario: El lector debe conocer que en las demostraciones se utilizan ideas muy prácticas (en este caso, el traslado del eje, para pasar el problema, a uno ya conocido). En algunos textos, tales ideas generalmente están ocultas, el lector tiene la necesidad de buscarlas o corre el riesgo de obtener un conocimiento fragmentado, sin ideas básicas o conocimientos generales que le den unidad.

Teorema de existencia de raíces

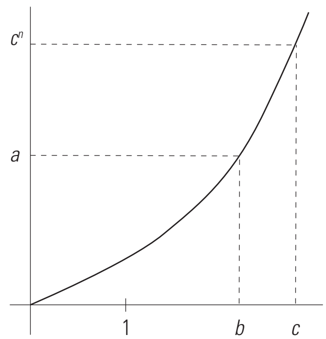
El teorema de la existencia de raíces en el lenguaje coloquial pude traducirse de la siguiente manera, si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y además toma valores de signo opuesto en los extremos $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos una raíz de f en (a,b), es decir existe un punto c del intervalo (a,b) en el que $f(c) = 0$.

Dados $a > 0$ y $n \in \aleph$, hay exactamente un b tal que $b^n = 0$ (Cada número real positivo tiene una raíz n-ésima).

Demostración: Sea $f(x) = x^n$ definida en $[0,c]$ con $c > 1$ y $c > a$.

En consecuencia $f(0) = 0$ y $f(c) = c^n > a > 0$. Es decir $f(0) < a < f(c)$.

En otras palabras a, es intermedio y se puede asegurar la existencia de $b \in (0,c)$ tal que $f(b) = b^n = a$.



Nótese que la idea de la demostración consiste en ubicar a entre 0 y c^n para algún c conveniente. O sea, si deseo tener un, $0 < a < c^n$, ¿cómo debe ser c? Como c puede ser cualquiera (pues solo juega un papel auxiliar) se elige de tal manera que $0 < a < c < c^n$. Pero para ello se necesita que también sea mayor que 1.

Comentario: Alguien puede preguntar: ¿Por qué se debe demostrar que existen las raíces? ¡Claro que existen! ¡Mi calculadora me las proporciona!

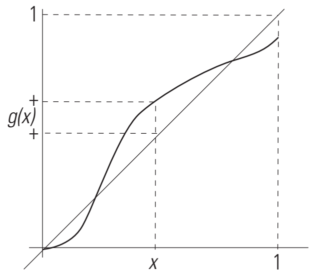
Desde el punto de vista práctico, los teoremas de existencia no tienen sentido, (al igual que no tiene sentido saber cómo funciona una calculadora, el móvil, o el IPad, etcétera; Con saberlos usar basta). Pero estos teoremas pertenecen a los fundamentos de las matemáticas, y para un matemático tienen mucho sentido.

Teoremas de punto fijo

Existen en matemáticas varios teoremas que se pueden clasificar como una familia de teoremas de punto fijo, están los que existen en el plano, en el espacio euclídeo, en el convexo compacto entre otros, en este apartado solo trataremos dos de los que tienen relación directa con el teorema de Bolzano, que en el leguaje ordinario manifiesta que, si una función f verifica ciertas propiedades, entonces existe un punto x_0 tal que $f(x_0) = x_0$ es decir un punto fijo de la función (Minazzo, y Rider, 2007).

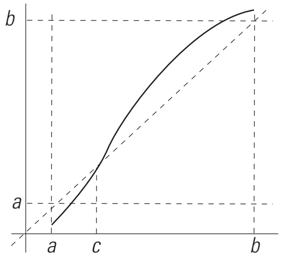
I. Sea x continua en $[0,1]$ con $0 \leq f(x) \leq 1 \forall\, x \in [0,1]$. Entonces $\exists\, c \in [0,1]$ $\ni f(c) = c$, (o sea que f cruza la recta $y = x$), veamos los diferentes casos

Demostración: Caso 1. Si la función empieza y/o termina con esquina (véase la siguiente figura), el resultado es trivial, pues $f(0) = 0$ y/o $f(1) = 1$.



Caso 2. Si la función es constante el resultado también es obvio.

Caso 3. Supóngase entonces que f no es constante y que $f(0)$ y $f(1)$ están en $(0,1)$. Defínase $g(x) = f(x) - x$, (Nótese que g en la altura de f medida desde la altura $y = x$, véase la siguiente figura), pero esta función, cumple las condiciones del teorema de Bolzano y en consecuencia $\exists c \in (0,1) \ni g(c) = 0$. En otras palabras para algún $f(c) = c$ para algún $c \in (0,1)$.



II. Sea continua en $[a,b]$ con $f(a) \leq a$ y $f(b) \geq b$. Entonces $\exists\, c \in [a,b] \ni f(c) = c$.

Demostración: Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$. El teorema es trivial. Supóngase entonces que $f(a) < a$ y $f(b) > b$. Definiendo g como en el teorema I, y aplicando Bolzano, el teorema se sigue. Ver ejercicios 10 y 11 de este apartado.

Comentario: Los teoremas de punto fijo, tienen aplicaciones en la solución numérica de ecuaciones, en el apartado del teorema del valor medio se tendrán más herramientas para su explicación.

Teorema Mapeos de Contracción / (La condición de Lipschitz[24])

En el análisis básico de Lipschitz existe una condición que lleva su nombre, que es hoy en día muy importante para pruebas de existencia y unicidad en cuanto a la teoría de aproximación y la teoría de la función constructiva. Si f es una función definida en el intervalo (a,b) entonces f se dice que satisface una condición de Lipschitz con el exponente α y coeficiente M, si para dos valores x, y en (a,b) la condición $|F(y) - f(x)| \leq M|y - x|^{a}\; a > 0$.

Teorema Puntos fijos de contractores

Sea f una función definida en $[a,b]$ y tal que $a \leq f(x) \leq b \;\forall\, x \in [a,b]$:
$|f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y| \;\forall\, x, y \in [a,b]$ y alguna $q < 1$.

Entonces f tiene un único punto fijo Z en $[a,b]$, y la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ converge a Z, si $x_0 \in [a,b]$.

[24] Lipschitz, O. Matemático Alemán (1832-1903), la condición de Lipschitz garantiza a las funciones que la verifican, un grado de regularidad intermedio entre la continuidad y la derivabilidad. Tomado de: *https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/lipschitz-rudolf-otto-sigismund*

Demostración:

1. f es continua pues dado $\varepsilon > 0$ se tiene: $|f(x) - f(y)| \leq q|x-y| < \varepsilon$ si $|x-y| < \varepsilon / q = \delta$.

2. f tiene un punto fijo Z pues si $Z \neq a$, entonces $f(a) > a$ y si $Z \neq b$, $f(b) < b$.

3. Tomemos ahora un $x_0 \in [a,b]$. Entonces $x_1 = f(x_0) \in [a,b]$, y en general $x_{n+1} = f(x_n) \in [a,b]$ pues f: $[a,b] \rightarrow [a',b'] \subset [a,b]$.

Por lo tanto.

$|x_{n+z}| = |f(x) - f(z)| \leq q|x_n - z| \leq q^2 |x_{n-1} - z| \leq \ldots \leq q^{n+1} |x_0 - z|$ En consecuencia $x_n \rightarrow z$ cuando $n \rightarrow \infty$ pues $(q < 1)$.

4. No pueden existir dos puntos fijos pues, si así fuera $|z_1 - z_2| = |f(z_1) - f(z_2)| \leq q^2 |z_1 - z_2| < |z_1 - z_2|$, y se ha logrado la contradicción.

La inversa conserva las propiedades de monotonía y continuidad

Teorema sea f estrictamente creciente y continua en $[a,b]$. Y sean $c = f(a)$ y la $d = f(b)$, y g la inversa de f.

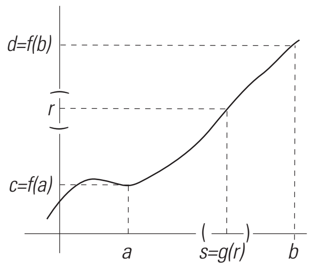
(Es decir para cada $y \in [c,d]$ sea $g(y)$ aquella $x \in [a,b]$ tal que $y = f(x)$).

Entonces a). g Es estrictamente creciente en $[c,d]$ y b). g Es continua en $[c,d]$.

Demostración: g (es estrictamente creciente). Se quiere demostrar que $y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$ para ello tomemos $y_1 < y_2$ en $[c,d]$, y sean $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$ las imágenes correspondientes en $[a,b]$. Puesto que y es la inversa de f, esto último significa que $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$. Pero $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$ por ser f estrictamente creciente. Pero esto es equivalente a decir $y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$ como se quería.

(g Es continua). Tómese un $\varepsilon > 0$ y un $r \in (c,d)$. Demostremos que g es continua en r. Para ello tomemos una vecindad de $g(r) = S$ de radio $\varepsilon > 0$. Se va a demostrar que existe una vecindad de r y radio $\delta > 0$, tal que $|y - r| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(r)| < \varepsilon$.

Sin pérdida de generalidad se elige ε de tal manera que $d = f(b) \geq f(s + \varepsilon)$ y $c = f(a) \leq f(s - \varepsilon)$ como se muestra en la siguiente figura.



Es decir $c \leq f(s - \varepsilon) < f(s) < F(s - \varepsilon) \leq d$. Como es estrictamente creciente esto significa que: $a \leq s - \varepsilon < s < s + \varepsilon \leq b$, es decir $s - \varepsilon < g(r) < s + \varepsilon$ la δ que buscamos es el más pequeño de los números $f(s) - f(s - \varepsilon)$ y $f(s + \varepsilon) - f(s)$.

Nótese que $|y - r| < \delta \Leftrightarrow r - \delta < y < r + \delta \Rightarrow g(r - \delta) < g(y) < g(+\delta)$. Y queremos $-\varepsilon < g(y) - g(r) < \varepsilon$, o sea $g(r) - \varepsilon < g(y) < g(r + \varepsilon)$. Lograríamos eso si $g(r - \delta) \geq s - \varepsilon$ y $g(r + \delta) \leq s + \varepsilon$. Para ello necesitamos $r - \delta \geq f(s - \varepsilon)$ y $r + \delta \leq f(s + \varepsilon)$. Pero esto sí se logra debido a la monotonía de f. Por eso $\delta \leq f(s) - f(s - \varepsilon)$ y $\delta \leq f(s + \varepsilon) - f(s)$ es decir δ es como se había mencionado.

Principio de Cantor (Sobre los intervalos anidados). Teorema (Weierstrass $\Rightarrow$ Cantor)

Todo sistema de intervalos anidados $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$ determina un único número real.

Otra representación poco conocida es la del axioma de continuidad que dice: "Toda sucesión creciente y acotada por arriba (superiormente) es convergente". Este parece ser el axioma de la completitud o completez de los números reales. En ocasiones es complicado darse cuenta pero existen otros dos axiomas equivalentes a este: el axioma del supremo y el axioma del principio de los sistemas anidados.

Demostración: Por definición de intervalos anidados si:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset ... \text{ y } \lim_{n \to \infty} a_n - b_n = 0$$

Por lo tanto la sucesión $\{a_n\}$ es no decreciente y la $\{b_n\}$ es no creciente, además ambas son acotadas pues están contenidas en $[a_1, b_1]$. Por Weierstrass ambas convergen, en a y b respectivamente. Pero $a = b$ porque $b - a = b - b_n + b_n - a_n + a_n - a$ y por la desigualdad del triángulo, vista con anterioridad en (2.4). $|b - a| \leq |b - b_n| + |b_n - a_n| + |a_n - a|$, Y así $|b - a|$ es menor que cualquier $\delta > 0$ pre especificado, pues el lado derecho de la desigualdad puede hacerse tan pequeña como se quiera tomando la n lo suficientemente grande.

Comentario: El principio de continuidad de Cantor es, quizá el más atractivo para nuestra intuición, pues está basado en la idea de aproximar un número irracional encerrándolo sucesivamente en intervalos racionales cada vez más estrechos, como en el siguiente ejemplo.

$$1 < \sqrt{3} < 2 \quad porque \quad 1 < 3 < 4$$

$$\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2 \quad porque \quad \frac{9}{4} < 3 < 4$$

$$\frac{6}{4} < \sqrt{3} < \frac{7}{4} \quad porque \quad \frac{36}{16} < 3 < \frac{49}{16}$$

$$\frac{13}{8} < \underset{\downarrow}{\sqrt{3}} < \frac{14}{8} \quad porque \quad \frac{169}{64} < \underset{\downarrow}{3} < \frac{196}{64}$$

Teorema de Bolzano $\Rightarrow$ Weierstrass

El teorema de Bolzano Weierstrass es sin duda uno de los resultados más importantes sobre convergencia de sucesiones, ya que de él se deduce el teorema de completitud, las nociones de límite superior e inferior y pueden caracterizar las sucesiones convergentes.

Todo conjunto de números reales infinito y acotado contiene, al menos un punto de acumulación.

Demostración: Como el conjunto es acotado podemos suponer que está contenido en un intervalo cerrado $[a,b]$ se utilizará el algoritmo de bisección para asegurar la existencia de un punto del conjunto en la propiedad de que tiene infinitos puntos del conjunto arbitrariamente cercanos a él.

1. Divídase el conjunto en dos partes iguales dando lugar a dos sub-intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$ como el conjunto es infinito al menos uno de los sub-intervalos, contiene un número infinito de puntos del conjunto. Llamemos $[a_1,b_1]$ al sub-intervalo que contiene infinitos puntos (si los dos son infinitos tomamos el de la izquierda).
2. Aplique el paso 1 al conjunto $[a_1,b_1]$ y continúese el proceso con $[a_2,b_2]$. En la etapa tomemos un intervalo $[a_{n-1},b_{n-1}]$ que contiene un número infinito de puntos del conjunto, lo partimos en dos partes iguales y obtenemos un intervalo $[a_n,b_n] \subset [a_{n-1},b_{n-1}]$ que contiene un

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \ldots = \frac{b - a}{2^n} \rightarrow 0 \quad si\ n \rightarrow \infty$$

número infinito de puntos del conjunto. Continuando el proceso indefinidamente, obtenemos un sistema de intervalos anidados pues:

Por el principio de Cantor este sistema de intervalos determina un único número real l. Para estar seguros de que hay puntos del conjunto arbitrariamente cercanos a l, tómese una vecindad en cualquiera de l y nótese que, por construcción, tal vecindad contiene a todos los intervalos anidados después de un n (tomando un n suficientemente grande $(b - a) / 2^n < \delta$ para cualquier $\delta > 0$) y en consecuencia la vecindad contiene un número infinito de puntos del conjunto.

Teorema de Cantor $\Longrightarrow$ Cauchy

Una sucesión $\{\mu_n\}$ es convergente, si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un N tal que $|\mu_p - \mu_q < \varepsilon|$ para cualquier $p, q > N$.

Demostración: ($\Rightarrow$: Si la sucesión converge entonces es de Cauchy).

$|\mu_p - \mu_q| \leq |\mu_p - 1| + |1 - \mu_q| < \varepsilon$ si $p, q > N$, para algún N, porque cada uno de los términos a la derecha de la desigualdad, lo podemos hacer tan pequeño como queramos (en particular $\varepsilon/2$) tomando a lo suficientemente grandes.

($\Leftarrow$: Si es de Cauchy entonces converge). Esto lo demostraremos apoyándonos en el teorema de Bolzano-Wierstrass que se deriva a su vez del principio de cantor.

Supongamos que la sucesión $\{\mu_n\}$ es de Cauchy, es decir $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\, N \rightarrow |\mu_p - \mu_q| < \varepsilon$ si $p, q > N$. En particular $|\mu_N - \mu_{N\text{-}n}| < \varepsilon \forall\ n \in \aleph$, o en otras palabras $\mu_N - \varepsilon < \mu_{N+n} < \mu_{N+\varepsilon} \forall\ n \in \aleph$. Es decir el conjunto infinito de números $\mu_{N+1}, \mu_{N+2},\ldots$ es acotado y por el teorema de Bolzano-Weierstrass debe tener un punto límite al menos.

Demostraremos a continuación que no puede haber más de un punto límite.

Sean a y b dos puntos de acumulación del conjunto infinito $\{\mu_{N+n}\}$ por la desigualdad del triángulo (sección 2.4), se tiene que:

$|b - a| = |b - \mu_q + \mu_q - \mu_p + \mu_p - a| \leq |b - \mu_q| + |\mu_q - \mu_p| + |\mu_p - a|$, pero cada uno de los términos del lado derecho de la desigualdad, se puede hacer tan pequeño como se quiera, el intermedio porque la secesión $\{\mu_n\}$ es de Cauchy, los otros dos, porque son puntos de acumulación de y, así deben existir puntos de la forma arbitrariamente cercanos a a y b. En consecuencia $|b - a|$ es menor que cualquier $\varepsilon > 0$ pre-especificado y por ello debe ser $a = b$ ahora bien $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = a$ porque, tomando a n lo suficientemente grande, hay infinitos puntos de la sucesión, a una distancia menor que ε de a, para cualquier ε pre-especificado (debido a que a es punto de acumulación).

Teorema de Bolzano Weierstrass (Versiones alternativas)

I. Teorema. Toda sucesión infinita de números reales, que sea acotada contiene al menos una sub-sucesión convergente.

Demostración: Sea $\{\mu_n\}$ la sucesión. Si hay solo un número infinito de puntos (números), diferentes en la sucesión entonces al menos uno de esos números se repite infinitamente. Si definimos una sub-sucesión eligiendo cada vez ese número, obtenemos la sub-sucesión convergente.

Si en cambio, la sucesión contiene un número infinito de valores distintos, entonces, puesto que la sucesión es acotada debe contener al menos un punto de acumulación, digamos x^*. Es decir, existen puntos de la sucesión arbitrariamente cercanos a x^*. Sea x_{n1} uno de los puntos de la sucesión, que están a una distancia menor de $(1/2)\, x^*$, x_{n2}, uno de los que están a una distancia menor que $(1/2)^2$ de x^*,..., x_{nk} uno de los que están a una distancia menor que $(1/2)^k$ de x^*,... con ello aseguramos que $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \ni |x^* - x_{nk}| < \varepsilon$ si $K > N$, de hecho $\exists\ N^* \ni n_k > N^* \Rightarrow |x^* x_{nk}| < \varepsilon$ es decir $\lim\limits_{\to\infty} x_{nk} = x^*$.

II. Teorema. Toda sucesión acotada de números reales admite una sucesión parcial convergente.

Demostración: Sea $\{x_n\}$una sucesión acotada de números reales y aplicando el lema de que toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona, para conseguir una sucesión parcial monótona $\{x_{\sigma(n)}\}$. Por ser $\{x_n\}$ acotada, tenemos $K \in / |x_n| \leq K\ \forall\ n \in$ pero entonces es obvio que también $\{x_{\sigma(n)}\} \leq K\ \forall\ n \in$. Así pues la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es monótona y acotada, luego convergente.

Se deja al lector realizar las comparaciones dada una $\{x_n\}$ para que pueda realizar las siguientes afirmaciones para cuando $\{x_n\}$.

a) $\{x_n\}$ Es monótona y acotada
b) $\{x_n\}$ Es convergente
c) $\{x_n\}$ Está acotada
d) $\{x_n\}$ Admite una sucesión parcial convergente

Se sabe que cada una de estas afirmaciones implica las consecutivas: a)$\Rightarrow$ b)$\Rightarrow$ c)$\Rightarrow$ d).

Se verifica que ninguna de las implicaciones es reversible, para esto basta con ver que $d) \not\Rightarrow c)$, para ello se toma:

$$x_n = \frac{n}{2}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) \forall n \in \text{ tenemos que:}$$

$x_{2n+1} = 0$ y $x_{2n} = n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, luego $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial que converge y otra que no es acotada, así que $\{x_n\}$ tampoco está acotada. Por tanto se facilita ver que la sucesión $\{(-1)^n / n\}$converge a en cero pero no es monótona luego $d) \not\Rightarrow c)$.

Comentario: En el teorema I se ha aprobado que si x^* es un punto de acumulación de una sucesión entonces existe una sub-sucesión que converge a x^*. ¿Si la sucesión tiene una sub-sucesión convergente, es su límite punto de acumulación de la sucesión? La respuesta es afirmativa: Considérese una sub-sucesión x_{nk} convergente a x^*.

Es decir $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \ni |x_{nk} - x^*| < \varepsilon\ si\ n_k > N$. Esto significa que existen puntos de la sub-sucesión (por tanto de la sucesión) arbitrariamente cercanos a x^* y entonces, x^* es punto de acumulación.

Teorema Continuidad Uniforme

Definición I. Una función f es uniformemente continua en un conjunto D, si $\forall \varepsilon > 0 \exists\ \delta > 0$, que depende solo de ε y D, de tal manera que para cualesquiera x, x' en D que cumplan $|x - x' < \delta|$ se tiene $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Ejemplo 1. $f(x) = sen\ x$, es uniformemente continua en $\Re$.

Demostración: La δ encontrada en el ejemplo 2 del apartado de continuidad, no depende de x_0 ello es suficiente para asegurar la continuidad uniforme.

Ejemplo 2. $f(x) = sen\ \frac{1}{x}$, no es uniformemente continua en (0,1).

Demostración: Considérense los puntos $x_n = \frac{1}{n\pi}$ y $x^1{}_n = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ los cuales necesariamente están en (0,1) para cualquier $v \in \aleph$. Ahora bien, $f(x_n) = sen\ n\pi = 0$ y $f(x^1{}_n) = sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = \pm 1$ y así, la distancia entre $f(x_n)$ y $f(x^1{}_n)$ es la unidad. Pero $\left|x_n - x^1{}_n\right| = \left|\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1/2)\pi}\right| = \left|\frac{n\pi + (\pi/2) - n\pi}{n\pi\ (n + (1/2)\ \pi)}\right| = \left|\frac{1}{n\ (2n+1)\ \pi}\right|$ puede hacerse tan pequeño como se desee tomando la n lo suficientemente grande.

Ejemplo 3. $f(x)\ \frac{1}{x}$, no es uniformemente continua en (0,1)

Demostración: Si así fuera, $\forall\ \varepsilon > 0$ existiría un δ (por ejemplo, $0 < \delta < 1$) tal que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} < \varepsilon\right|$ si $\left|x - x_0\right| < \delta$ para todo x, $x_0 \in (0,1)$. Pero si se toma $x = x_0 + \delta$, $\left|f(x_0) - f(x_0 + \delta)\right| = \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{(x_0 + \delta)}\right| = \left|\frac{\delta}{x_0\ (x_0 + \delta)}\right|$ se puede hacer tan grande como se quiera tomando x_0 lo suficientemente cerca de 0.

Definición II. Toda función continua en un intervalo cerrado, es uniformemente continua en ese intervalo.

Demostración: Si la función no fuese uniformemente continua en $[a,b]$ existiría un $\varepsilon > 0$ fijo y puntos $x\ \xi$ en $[a,b]$ arbitrariamente cercanos uno del otro, para los cuales $f(x) - f(\xi) \geq \varepsilon$. Entonces sería posible, para cualquier n, elegir puntos x_n, ξ_n en $[a,b]$ para los cuales $|f(x_n) - f(\xi_n) \geq \varepsilon$ y $|x_n - \xi_n| < \frac{1}{n}$.

Puesto que los forman una sucesión acotada (cada $x_n \in [a,b]$), podría encontrarse una sub-sucesión convergente a un punto y en el intervalo.

Entonces los correspondientes valores de ξ_n convergerían también a, n (porque $|\xi_{nk} - n| = |\xi_{nk} - x_{nk} + x_{nk} - n| \leq |\xi_{nk} - x_{nk}| + |x_{nk} - n|$ y se ha logrado entonces una contradicción.

Anexos

Catedrático: Víctor Manuel Ramírez Hernández

Estudió la Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas con especialidad en Docencia Superior, en la Facultad de Ciencias de la Educación, realizó estudios de Maestría en Docencia en la Universidad Autónoma de Tamaulipas, cursó el programa Doctoral de Cognición y Aprendizaje con la Universidad de Sevilla España, realizó estudios Doctorales en Educación, en la Universidad Autónoma de Tamaulipas.

Entre los cargos que el maestro, Víctor Manuel Ramírez Hernández ha tenido; fue presidente de la Academia de Tecnología y Matemáticas en la Facultad de Ingeniería y Ciencias. Es Miembro fundador de la Academia de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Tamaulipas, presidió la Academia de Matemáticas de la Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades.

Es el actual presidente de la Academia de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Tamaulipas, ha publicado, libros electrónicos e impresos de matemáticas, ha realizado investigación sobre procesos de aprendizaje de las matemáticas, ha presentado sus investigaciones en la Universidad de Chiapas, el Instituto Tecnológico de Veracruz, la Universidad Autónoma de Nuevo León, así como en congresos internacionales en la Habana, Cuba, ha sido formador de talentos para competencias olímpicas en matemáticas, en la formación y desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes destacados, ha impartido cátedra a profesores de diversas instituciones de educación media superior y superior del estado de Tamaulipas, cuenta con perfil Promep, desde 2006, pertenece al cuerpo Académico de Evaluación Educativa, actualmente imparte cátedra en el área de Ciencias, Estadística y Matemáticas en la Unidad de Ciencias de la UAT, y de Cálculo Multivariable en la carrera de Ingeniería Biomédica en ULSA Victoria, Campus de la Salud.

Catedrático: Hugo Isaías Molina Montalvo

Es egresado de la licenciatura en Ciencias de la Educación por parte de Universidad Autónoma de Tamaulipas, tiene una Maestría en Docencia y estudios doctorales de Educación Internacional en la misma institución. Es Doctor en Ciencias de la Educación por parte del Centro Internacional de Educación Avanzada. Ha impartido cátedra en diversas instituciones del estado de Tamaulipas, ha formado parte de los programas de educación media superior del gobierno federal en la modalidad a distancia. Actualmente, es líder del cuerpo académico de Evaluación Educativa, cuenta con la distinción de la Secretaría de Educación Pública de Perfil Deseable para profesores de carrera. Ha publicado libros y artículos en revistas arbitradas, realiza investigación sobre evaluación educativa. Ha presentado los resultados de sus investigaciones en diferentes congresos nacionales e internacionales.

El secreto del mago aplicado a la educación

La mayoría de las ocasiones en las que las personas me preguntan, ¿cómo le haces para entender las matemáticas?, o, ¿cómo aprendiste matemáticas? Me viene al pensamiento el secreto del mago, que uno de mis profesores de licenciatura relató en una de sus clases (debo ser honesto al referir este escrito, del cual no he encontrado si tiene derecho de autor), y lo comparto a continuación.

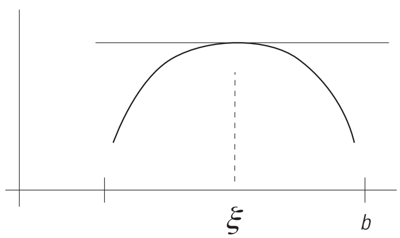
i. **A** tiene a la vista un esquema (pero oculto a miradas ajenas)
ii. **A** organiza un discurso basándose en el esquema
iii. Para la audiencia, **A**, es (o parece ser) muy inteligente o por lo menos dueño de una memoria extraordinaria

¿Cuál es el truco? Obviamente el esquema
Moraleja; Ayúdate con esquemas para tus discursos
Advertencia; Cuida que tus esquemas sean correctos
En matemáticas ayúdate con:

- Gráficos
- Figuras geométricas
- Esquemas de relación
- Diagramas
- Fórmulas matemáticas
- Símbolos matemáticos

i. Es falso que los matemáticos seamos completamente abstractos
ii. Lo que pasa es que hemos aprendido a desconfiar de las ideas intuitivas
iii. Porque las ideas intuitivas, algunas veces fallan

Cuando digo **Teorema de Rolle** debe pensarse en esta gráfica



Además hay que recordar, el teorema en el lenguaje lógico formal de las matemáticas que dice:

Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable sobre un intervalo abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$ entonces:
Existe al menos un punto ξ perteneciente al intervalo (a,b) tal que $f'(\xi)=0$

Inclusive pensarlo en el lenguaje coloquial:

En el Teorema de Rolle, existe un punto en el que la tangente de ese punto, es paralela al eje de las abscisas.

Simbología

Nombre	Símbolo	Se lee
Conjunción Lógica	$\wedge$	y
Disyunción Lógica	$\vee$	o
Implicación	$\Rightarrow$	Implica
Doble implicación	$\Leftrightarrow$	Si y solo si, es Equivalente a
Mayor que	$>$	Mayor que
Menor que	$<$	Menor que
Igual	$=$	Igual a
Desigual	$\neq$	Desigual
Existe	$\in$	Existe
Conjunto de los Reales	$\Re$	Números reales
Para todo	$\forall$	Para todo
Valor absoluto o módulo	$\lvert x \rvert$	Valor absoluto de un número
Indica que una ecuación continúa en el siguiente renglón	$\hookleftarrow$	Continúa en el siguiente renglón
Existe cuantificador	$\exists$	Existe
Número Pi	π	Pi
Número	$\emptyset$	Fi
Número Euler	e	e
Los números naturales	$\mathbb{N}$	Conjunto de los naturales
Conjunto de los enteros	$\mathbb{Z}$	Conjunto de los enteros
Unión de conjuntos	$\cup$	Unión
Intersección de conjuntos	$\cap$	Intersección
Idénticamente igual a	$\equiv$	Idénticamente igual a
No pertenece al conjunto de	$\notin$	No pertenece
Desde infinito negativo a infinito positivo	$(-\infty, +\infty)$	Recta real
Por lo tanto por consiguiente	$\therefore$	Por lo tanto
Porque puesto que		Porque
Conjunto vacío	$\varnothing$	Conjunto vacío
Tal que	$/$	Tal que
Negación de	$\neg$	Negación de
Incremento	Δ	Incremento de
Factorial de un número	$n!$	Factorial de un número
Incremento delta minúscula	δ	Delta
Valor absoluto de un número	$\lvert n \rvert$	Valor absoluto de un número
Raíz enésima de un numero	$\sqrt[n]{x}$	Raíz enésima

Glosario de conceptos

Concepto	Definición
Abstracción	Acción y efecto de abstraerse. Separar por medio de una operación intelectual un rasgo o una cualidad de algo para analizarlos aisladamente o considerarlos en su pura esencia o noción.
Acotación	La acotación es la representación de las dimensiones y otras características de un objeto en el dibujo técnico. Además de las dimensiones la acotación también representa información adicional (distancias, materiales, referencias, etcétera) mediante el uso de símbolos, figuras y notas.
Álgebra	Parte de las matemáticas en la cual las operaciones aritméticas son generalizadas empleando números, letras y signos. Cada letra o signo representa simbólicamente un número u otra entidad matemática. Cuando alguno de los signos representa un valor desconocido se llama incógnita.
Algoritmo	Procedimiento definido para la solución de un problema, paso a paso, en un número finito de pasos.
Análisis	Parte de la matemática que tiene como conceptos fundamentales la función, el límite, la continuidad; abarca el cálculo diferencial y el cálculo integral, las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones integrales, la teoría de funciones y el cálculo de variaciones, el análisis vectorial y la geometría diferencial, el análisis práctico trata sobre procedimientos de resolución por cálculo y gráficos.
Argumento	a) Medio de demostración b) Variable independiente de una función matemática. c) Ángulo determinado por el vector que representa un número complejo en el plano de Gauss y la dirección positiva del eje real.
Argumentación	La argumentación es un texto que tiene como fin o bien persuadir al destinatario del punto de vista que se tiene sobre un asunto, o bien convencerlo de la falsedad o veracidad de una teoría, para lo cual debe aportar determinadas razones.
Argumento	El argumento de una función es el valor que se le da a la variable independiente para evaluarla.
Aritmética	Parte de la matemática que estudia los números y las operaciones que se hacen con ellos.
Axioma	Es una verdad evidente que no requiere demostración.
Bidimensional	Un objeto es bidimensional cuando está representado en dos dimensiones. O en el plano Cartesiano.

Concepto	Definición
Cálculo	Rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las cantidades que varían continuamente y las relaciones entre ellas. En el Cálculo se estudian los conceptos de límite, continuidad, derivada, integral y sus aplicaciones. El Cálculo también se denomina *"Cálculo infinitesimal"*.
Cantidad	La cantidad es la asignación, usualmente numérica, de una magnitud matemática a una propiedad medible que admite grados de comparación y representa o bien un contaje del número de elementos de un conjunto, o bien el resultado de una medición física de una magnitud.
Ciencia	La ciencia *(del latín scientia conocimiento)* es un sistema ordenado de conocimientos estructurados que estudia, investiga e interpreta los fenómenos naturales, sociales y artificiales.
Condición	En lógica es una proposición o enunciado P que tiene que ser verdadero para que otra proposición Q sea verdadera. Si P es una condición necesaria, entonces Q no podría ser verdadera sin serlo P. Si P es una condición suficiente, entonces siempre que P sea verdadera también Q será verdadera, pero no al contrario. Por ejemplo para que un cuadrilátero sea rectángulo debe cumplir la condición necesaria de que dos de sus lados sean paralelos, pero ello no es suficiente para que un cuadrilátero sea rombo, es que todos sus lados tengan un longitud de 5, pero esta no es una condición necesaria. Para que un rectángulo sea cuadrado, es condición necesaria y suficiente que todos sus lados sean iguales. En términos formales, si P es una condición necesaria de Q, entonces $Q \rightarrow P$. Si P es una condición suficiente, entonces $P \rightarrow Q$. Si P es una condición necesaria y suficiente de Q, entonces $P = Q$.
Cognición	La palabra cognición viene del latín *cognoscere,* que significa conocer. Por lo tanto, cuando hablamos de lo cognitivo normalmente nos estamos refiriendo a todo aquello que pertenece o está relacionado con el conocimiento, es decir, el cúmulo de información que hemos adquirido gracias al aprendizaje o la experiencia.
Conjetura	Por conjetura se entiende el juicio que se forma (moral, ético o matemático) de las cosas o sucesos por indicios y observaciones. En matemáticas el concepto de conjetura se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha. Una vez que se demuestra la veracidad de la conjetura, esta pasa a ser considerada teorema que puede utilizarse para construir otras demostraciones. Por ejemplo: a) La conjetura de Goldbach. b) La conjetura de los números primos gemelos. c) La conjetura de Collatz. d) La conjetura de Poincaré (demostrada por Perelmán). e) La conjetura de Ramanujan-Petersson. Entre otras.

Concepto	Definición
Conjunto	Es toda colección de elementos que pertenecen a una categoría bien definida. Ciertos conjuntos como el de los números naturales tienen un número infinito de elementos.
Continuidad	En matemáticas, una función continua es aquella para la cual, intuitivamente, para puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en los valores de la función; aunque en rigor, en un espacio métrico como en variable real, significa lo contrario, que pequeñas variaciones de la función implican que deben estar cercanos los puntos.
Contradicción	En lógica, una proposición, enunciado o frase que afirma algo y lo niega. Es una forma de palabras o símbolos que no puede ser verdadera; por ejemplo: *"si puedo leer el libro entonces yo no puedo leer el libro"*.
Convergencia	Acercarse cada vez más a un valor. Por ejemplo, si damos valores a *"x"* cada vez más grandes y los sustituimos en $1/x$, la sucesión de valores que vamos obteniendo se acercan cada vez más a cero; entonces se dice que la sucesión es convergente o converge a cero.
Corolario	Proposición que es una consecuencia inmediata de otra, y cuya demostración requiere poco o ningún razonamiento.
Correspondencia	Dados dos conjuntos X e Y, una función f que determina alguna relación binaria entre algún elemento de X con algún elemento de Y, diremos que esa función: f define una correspondencia entre X e Y que se representa como *f: X implica Y*.
Creciente (función)	Una función creciente f es una tal que al aumentar la variable independiente x, aumenta la variable dependiente y.
Decreciente (función)	Una función decreciente f es una función tal que al aumentar la variable independiente x, disminuye la variable independiente y. Una función f es decreciente si para todo de punto x del dominio la derivada es negativa, es decir $f'(x) \leq 0$.
Deducción	Conclusión basada en un conjunto de proposiciones verdaderas.
Demostración	Justificación de una afirmación, premisa o sentencia de una manera estructurada, lógica e irrefutable a partir de otras sentencias verdaderas. El proceso de demostración en matemáticas es muy importante, pues cada nuevo teorema debe demostrarse con base en los axiomas conocidos y a otros teoremas ya demostrados.
Demostración por contradicción	Demostración en la cual se supone falsa la premisa inicial y se llega a una contradicción o a una premisa falsa, concluyendo, entonces que la suposición es falsa, haciendo la premisa inicial verdadera. La demostración por contradicción también se conoce llama *"Demostración por reducción al absurdo"*.

Concepto	**Definición**
Derivada	En matemáticas la derivada de una función mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente.
Desigualdad	Una desigualdad es una relación matemática que compara el valor de dos números o expresiones algebraicas. Las desigualdades utilizan la siguiente notación: DESIGUALDAD SIGNIFICADO $>$ Mayor que $<$ Menor que $\geq$ Mayor igual que $\leq$ Menor igual que
Diagrama	En matemáticas un diagrama es una representación gráfica de la relación entre varios objetos matemáticos.
Diferencia	Lo contrario a la igualdad tanto en términos matemáticos como sociales y otros.
Dominio	El dominio *"D"* de una función es el conjunto formado por todos los valores que la función puede aceptar para devolver un único valor por cada uno de ellos. Un elemento del dominio generalmente se denota con la literal *"x"* Así $x \in D_f$ se lee: *"x está en el dominio de la función f"* Por ejemplo, el dominio de la función $y=x^2$ es el conjunto de los números reales, porque podemos calcular el cuadrado de cualquier número real. Por otra parte el dominio de la función $y = \sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos, pues solo podemos calcular la raíz de todos los números no negativos.
Ecuación	Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Por ejemplo: $x^n + y^n = z^n$
Enunciado	Secuencia de palabras delimitada por pausas muy marcadas, que puede estar constituida por una o varias oraciones.
Equivalencia	Propiedad que presentan dos cantidades de tener el mismo valor. Entonces, decimos que dos cantidades son equivalentes si son iguales.
Error	a) Diferencia entre el valor aproximado y el valor real de una cantidad. b) En álgebra se comete un error cuando se aplica incorrectamente una propiedad de los números u omite un cálculo para la solución del problema
Evaluación	Es la determinación sistemática del mérito, el valor y el significado de algo o alguien en función de unos criterios respecto a un conjunto de normas.
Factor	Número o expresión algebraica que se está multiplicando. Por ejemplo en la expresión: $2xy^2$ Hay tres factores y^2, x, 2

Concepto	**Definición**
Factorial	El factorial del número natural *“n”*, que se denota como: , se define como el producto de todos los números naturales desde 1 hasta *n*:
Finito	Expresión que indica que algo tiene fin o límites de manera que se pueden determinar sus dimensiones o el número de sus elementos a través de mediaciones, conteo u otro similar. Es lo contrario de infinito.
Fórmula	Igualdad que sirve para calcular un valor a partir de otros valores conocidos. Por ejemplo, la fórmula general para calcular las raíces de una ecuación de segundo grado es: $ax^2 + bx + c = 0$ es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Y la fórmula para calcular el número de diagonales D que se pueden dibujar en un polígono regular es: $D = \frac{n\,(n - 3)}{2}$
Función	Definición predominante en los textos del nivel medio superior. La Función es una correspondencia entre conjuntos de números. Una variable “y” se dice función de otra variable “x” si a cada valor de “x” le corresponde uno y solo uno de “y”. Se expresa como $y = f(x)$ en la que “x” es la variable independiente e “y” es la dependiente. Una función “f” de un conjunto “x” en otro “y” es una correspondencia que asigna a cada elemento “x” de X un elemento “y” de Y. Diremos que “y” es la imagen bajo “f”, denotado $f(x)$. El dominio de “f” es el conjunto X y su recorrido consta de todas las imágenes $f(x)$ de los elementos “x” de X. Si a cada valor de su recorrido le corresponde exactamente un elemento en su dominio, la función se llama inyectiva. Además si el recorrido de “f” es todo el conjunto y, la función es suprayectiva. Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números Reales a un conjunto Y de números Reales, donde “y” es único para un valor específico de “x”. Una función es el conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) en los cuales dos pares ordenados distintos no tienen el mismo primer número. El conjunto de todos los valores permisibles de “x” es llamado dominio de la función y el conjunto de todos los valores resultantes de “y” es llamado contra-dominio de la función. Sean X y Y dos conjuntos. Una función de X a Y es una regla para asignar un (y solo un) elemento en Y a cada elemento de X.

Concepto	Definición
	Una relación en la que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del codominio recibe el nombre de función. Al conjunto de todos los valores de "x" se le conoce como dominio de la función, y al conjunto de todos los valores posibles de "y" como codominio, rango, contra-dominio o imagen. Sean X y Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que se asigna a cada elemento $x \in X$ una única $y \in Y$. Una función es una asignación, para cada valor de una variable "x" en un cierto conjunto, exactamente un valor de otra variable "y". La variable "y" se llama variable dependiente y la variable "x" se llama variable independiente. Se dice que "y" es una función de la variable "x" cuando a todo valor de "x" (tomado de un determinado conjunto de valores) corresponde un valor de "y" El concepto más importante de todas las matemáticas es, de acuerdo a las anteriores aseveraciones, el de función; en casi todas las ramas de la matemática moderna, la investigación se centra en el estudio de funciones. Los distintos objetos y fenómenos que observamos en la naturaleza están orgánicamente relacionados unos con otros; son interdependientes. El género humano conoce desde hace tiempo las relaciones más sencillas de esta clase, y este conocimiento se halla expresado en las leyes físicas. Estas leyes indican que las distintas magnitudes que caracterizan un fenómeno dado están tan íntimamente relacionadas que algunas de ellas quedan completamente determinadas por los valores de las demás. Fueron correspondencias de esta clase las que sirvieron de origen al concepto de función. Por tanto podemos definir una función como una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un número real, aunque no necesariamente una regla que pueda ser expresada mediante una fórmula algebraica; ni tampoco necesariamente una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica. Más aún, la regla puede prescindir de algunos números y puede incluso no estar del todo claro a qué números se aplica la función. El conjunto de los números a los cuales se aplica una función recibe el nombre de dominio de la función. Para designar una función mediante una letra. Se emplea preferentemente la letra 'f', lo cual hace que sigan en orden de preferencia las letras 'g' y 'h', pero para tal fin, puede servir cualquier letra (e incluso cualquier símbolo razonable) sin excluir la 'x' y la 'y', si bien estas letras suelen reservarse para designar números. Si f es la función, entonces el número que f asocia con {el número} x se designa por $f(x)$; este símbolo se lee 'f de x' y se le da con frecuencia el nombre de valor de f en x. Otra simbologías son $f(x)$ o "y".
Geometría	Estudio de las rectas, curvas, superficies y puntos en el espacio. Por ejemplo la geometría trata la medición o cálculo de ángulos formados por rectas, las relaciones fundamentales del círculo, las relaciones entre rectas y puntos sobre una superficie.

Concepto	**Definición**
Gráfica	Una gráfica o representación gráfica es un tipo de representación de datos, generalmente numéricos, mediante recursos visuales (líneas, vectores, superficies o símbolos), para que se manifieste visualmente la relación matemática o correlación estadística que guardan entre sí.
Hipótesis	El término hipótesis está formado por dos palabras de origen griego: *hipo*, que significa subordinación o por debajo y *tesis* que significa conclusión que se mantiene con razonamiento, con lo cual podemos decir que la hipótesis sería *"lo que se pone en la base"*. La hipótesis es un enunciado no verificado, una vez verificado o confirmado dejará de ser hipótesis y se convertirá en un enunciado verificado.
Igualdad	Existe entre las diferentes denominaciones admisibles de un mismo objeto.
Inducción	La inducción es un tipo de razonamiento en que la verdad de las premisas brinda apoyo a la verdad de la conclusión, pero no la garantiza.
Infinito	El concepto de infinito aparece en varias ramas de la matemática, la filosofía y la astronomía, en referencia a una cantidad sin límite o sin final contrapuesto al concepto de finitud.
Integración	Sumación continua de la variación de una función $f(x)$ sobre un intervalo de la variable x, es el proceso inverso de la derivación en el cálculo infinitesimal y su resultado se llama la integral de $f(x)$ con respecto a x. Existen diferentes tipos de integración de funciones como por ejemplo: • La integración por partes. • La integración por sustitución trigonométrica. • La integración por fracciones parciales. • La integración por cambio de variable. • La integración de funciones irracionales. • La integración numérica. • Entre otros métodos de integración de funciones.
Intervalo	Es un subconjunto conexo de la recta real. Es un conjunto medible y tiene la misma cardinalidad que la recta real. Existe diferentes notaciones para los intervalos: • Los intervalos abiertos. • Los intervalos cerrados. • Los intervalos semiabiertos. • Los intervalos con infinito. • Entre otros.
Lema	Es una proposición demostrada, utilizada para establecer un teorema menor o una premisa auxiliar que forma parte de un teorema más general.

Concepto	Definición
Límite	Es un elemento que formaliza la noción intuitiva de aproximación hacia un punto concreto de una sucesión o función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a un determinado valor.
Lógica	Es la ciencia formal y rama estricta de la filosofía como de las matemáticas que estudia los principios de la demostración y la inferencia válida, las paradojas y la noción de verdad. La palabra lógica deriva del griego antiguo *logiké* que significa dotado de razón, intelectual, dialéctico, argumentativo que a su vez viene de *logos* palabra, pensamiento, idea, argumento, razón o principio.
Método	Modo ordenado y sistemático de proceder para llegar a fin determinado.
Monótona	En matemáticas, una función entre conjuntos ordenados se dice que es monótona (o isótona) si conserva el orden dado.
Número irracional	Un número irracional es aquel que no puede expresarse como una fracción del modo (m/n), donde m y n son enteros y n es diferente de cero.
Número natural	En matemáticas, un número natural es cualquiera de los números que se use para contar los elementos de cierto conjunto.
Número primo	Un número primo es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores comunes el mismo y el 1.
Pensamiento	El pensamiento es la actividad u creación de la mente, se dice que todo aquello que es traído a existencia mediante la actividad del intelecto. Puesto que los números naturales se usan para contar elementos, el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos.
Postulado	Un postulado es una proposición no evidente por sí misma, ni demostrada, pero que se acepta, ya que no existe otro principio al que pueda ser referida.
Proposición	Enunciación de una verdad demostrada o que se quiere demostrar.
Racional	Dicho de una expresión algebraica que no contiene cantidades irracionales.
Subconjunto	En matemáticas, un conjunto B es subconjunto de un conjunto A si B está contenido dentro de A.
Sucesión	En análisis matemático y álgebra, una sucesión es una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su codominio es cualquier otro conjunto, generalmente de números de diferente naturaleza, también pueden ser figuras geométricas o funciones.
Teorema	Un teorema es una proposición que afirma una verdad demostrable. En matemáticas, es toda proposición que partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una racionabilidad (tesis) no evidente por sí misma.

Concepto	**Definición**
Valor absoluto	El valor absoluto se define para números reales y complejos. Para números reales, el valor absoluto coincide con el número si el último es positivo o cero. El valor absoluto de un número negativo se obtiene multiplicando el número por -1, es decir cambiando su signo. El valor absoluto de un número *"r"* se denota por $\|r\|$. Por lo tanto $\|r\| = r$ para $r \geq 0$ y $\|r\| = -r$ para negativo r. En otras palabras, $\|r\|$ es la distancia desde el número r al origen.
Verdad	El término verdad se usa informalmente para afirmar la coincidencia entre una afirmación y los hechos. El término no tiene una única definición en la que esté de acuerdo la mayoría de los estudiosos.

Ejercicios propuestos

1. Demostraciones matemáticas, y dificultades en el estudio del análisis matemático.

Ejercicio 1; Realice para sus alumnos, la representación (teórica y gráfica) de al menos 10 distintas acepciones del concepto de función.

Ejercicio 2; Deduzca y diserte las principales dificultades en el estudio del análisis y las demostraciones matemáticas.

2. Límites.

Ejercicio 1; Demostrar que:
$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

Ejercicio 2; Demostrar que:
$0 < a < b \wedge 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

Ejercicio 3;
Justifique cada implicación ($\Rightarrow$) o doble implicación ($\Leftrightarrow$) de la demostración del Teorema 1 $|x| = |-x|$ (todo se mantiene si se cambia el signo dentro de las barras de valor absoluto) y manifieste por qué el teorema queda demostrado con una argumentación.

Ejercicio 4; Justifique cada implicación de la demostración del teorema 2. Teorema 2 $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ si $x \neq 0$ (el valor absoluto del recíproco de un número es el recíproco del valor absoluto del mismo).

Ejercicio 5; Justifique cada implicación de la demostración del teorema 3. Teorema 3 $|xy| \leq |x|\,|y|$ (el valor absoluto de un producto, es el producto de los valores absolutos de los factores).

Ejercicio 6; Demuestre que $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (sugerencia: aplique el teorema 3).

Ejercicio 7; Desigualdad del triángulo. Demuestre que ($|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$).

Ejercicio 8; Teoremas adicionales sobre límites. Demuestre el teorema 8 para $a < 0$ y n (*impar*)

Ejercicio 9. Teorema 9, preservación del signo. Probar que, el signo también se preserva si $L < 0$. Sugerencia tomar $\in = -\frac{L}{2}$.

Ejercicio 10. Demostrar el teorema 11 si $f(x) \geq M$ ($f(x) \geq M \Rightarrow \lim f(x) \geq M$).

3. Continuidad

Ejercicio 1. Probar que sí se cumplen las consecuencias 1ª y2ª, del axioma del supremo, entonces $\mu = \sup(S)$.

Ejercicio 2. Demuestre los corolarios de la propiedad Arquimediana.

Ejercicio 3. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica.

$$sen\, x - sen\, x_0 = 2 \cos \frac{x + x_0}{2}\; sen \frac{x + x_0}{2}.$$

Ejercicio 4. Sea $f(x) = 4 - x^2$ y $c = \frac{3}{2}$ encuentre una vecindad de en la cual $f(x)$ es positiva. Represéntala en una gráfica.

Ejercicio 5. Probar el teorema de preservación del signo, cuando $f(c) < 0$, en cuyo caso cambia a "existe una vecindad de c para la cual $f(x) < 0$".

Ejercicio 6. Graficar f y S, donde $f(x) = x -1$ y $S = \{x \in [0,2]; f(x) < 0\}$.

Ejercicio 7. Probar el teorema de Bolzano si, $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.

Ejercicio 8. Sea $f(x) = x^2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ de modo que $f(x_1) = 1$ y $f(x_2) = 4$ y $k = 2$ Aplique el teorema de valor intermedio a esta situación, ¿qué concluye? Dibuje la gráfica de f y localice c, ¿cuál es su valor aproximado?

Ejercicio 9. ¿Qué c se escogería si, $a = 9$ y $n = 3$?
¿Cuál es $f(x)$ en este caso?
Dibuje la gráfica de f y obtenga b.

Ejercicio 10. Cubra los detalles del teorema de punto fijo en el apartado II.

Ejercicio 11. Si $f(x) = x^2 - 1$ y $[a,2] = [0,2]$ encuentre gráficamente el punto fijo, verifique que f cumpla las condiciones, del teorema de punto fijo en el apartado II.

Ejercicio 12. Grafique $f(x) = sen\,\frac{1}{x}$ en $(0,1)$ y $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0,1)$, y realizar una comparación entre las gráficas de, $f(x) = sen\,x$ y $f(x) = x^2$, y determinar qué caracteriza a las funciones uniformemente continuas.

Referencias bibliográficas de los nombres de los matemáticos

1. Bell, E. (1985). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica, p. 81.
2. Hawking, S. (2010). *Dios creó los números los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia*. España: EGEDSA, pp. 1-2.
3. Bell, E. (1939). *Men of Mathematics. The lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zenon to Poincare*, Estados Unidos. Lozada, p. 225-301.
4 Hawking, S. (2010). *Dios creó los números los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia*. España: EGEDSA, p. 496.
5. Bell, E. (1937). *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires: Ed. Lozada. Cap. 26, pp. 551, 567).
6. Pellicer, L. (2014). Ramanujan: *Matemático genial desde la pobreza extrema*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, pp. 107, 43-54
7. Descartes, R. (2013). *El discurso del método meditaciones metafísicas*. México: Ed. Tomo, pp. 10-15.
8. Hawking, S. (1993). *Historia del tiempo del big bang a los agujeros negros*. Barcelona: RBA editores, pp. 229-230.
9. Haaser, N. Lasalle, J. y Sullivan, J. (1976). *Análisis Matemático curso de introducción 1*. México. Editorial Trillas, p. 334).
10. Pastor, R. y Babini, J. (1985). *Historia de la Matemática. Vol. 2*. Barcelona: Gedisa, p. 155.
11. Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable*. 1st. Ed. México, D.F.: CENGAGE Learning, p. 113.
12. Morales, y Santacruz, C. (2008). "Los métodos de demostración en matemática". Maestría. San Carlos de Guatemala, p. 12.
13. Casas, F. (2010). "Algunas demostraciones geométricas de la irracionalidad de la raíz de 2". *Suma, 63*, pp. 17-20.
14. Jurgen, E. (2000). "The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)". *Mathematics Proceedings*, pp. 18, 27.
15. Bonbal, F. (2011). Bourbaki, N. "El matemático que nunca existió". Real Academia de Ciencias, *Matemáticas, Físicas y Naturales, 105*. N. 1, pp. 77 -98.
16. Soto, E. (2011). "Diccionario de conceptos matemáticos". Monterrey, N.L. México: Aprende matemáticas Org, p. 160.
17. Ayra, J. y Lardner, R. (1992). *Matemáticas aplicadas. A la administración y a la economía*. Editorial Prentice Hall. Tercera edición, p. 100.
18. Soto, E. (2011). *Diccionario de conceptos matemáticos*. Monterrey NL. México: Aprende matemáticas Org, p. 38.
19. Tomado de: *http://www.matetam.com/glosario/*
20. Tomado de: *http://www.matetam.com/glosario/*
21. Tomado de: *http://www.matetam.com/glosario/definicion/reciproco-un-numero*

22. Tomado de: *http://dle.rae.es/?w=corolario*
23. Hawking, S. (2010). *Dios creó los números los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia*. Barcelona, España: Editorial Crítica, p. 781
24. Bosch, G. (1993). *El teorema de Bolzano. Un teorema que no debe pasar inadvertido*. Educación Matemática, Vol. 5 Nº 3, p. 2

Referencias bibliográficas

Alcolea. (2002). "La demostración matemática: Problemática actual". *Contrastes, Revista Interdisciplinar de Filosofía,* VII, p. 31.

Arizmendi, H., Carrillo, A. y Lara, M. (1987). *Cálculo primer curso nivel superior*. México: Editorial Addison Wesley Iberoamericana, p. 86.

Arizmendi, H. y Carrillo, A. (1990). *Cálculo primer curso nivel superior*. México: Editorial Addison Wesley Iberoamericana, p. 116.

Ayra, J. y Lardner, R. (1992). *Matemáticas Aplicadas*. México: Editorial. Prentice Hall, p. 100.

Ayres / Mendelson. *Cálculo Diferencial e Integral*. Mc. Graw Hill

Baranekov, G. y Demidovich, B. (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*. Moscú: Editorial MIR.

Bell, T. (1985). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica, p. 151.

Casteleiro, J. (2006). *Introducción al análisis matemático I. Cálculo de una variable*. España: Editorial. ESIC, p. 55.

Castro, I. y Pérez, J. (2007). *Un paseo finito por lo infinito. El infinito en matemáticas*, p. 222. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.

Courant, R. y Robbins, H. (2002). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*. México: Editorial Fondo de Cultura Económica, p. 544

Daintith, J. (2001). *Diccionario especializado de matemáticas*. Colección Llave de la ciencia. Grupo Editorial Norma Educativa, p. 110.

De Burgos, R. (1995). *Cálculo infinitesimal de varias variables.* Madrid: Editorial. Mc. Hill, pp. 32, 33.

De Lorenzo, J. (2000). *Demostración con ordenador.* Madrid: Editorial. Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos, pp. 401-404.

Delgado, J. (1993). *Introducción al Análisis*. México. Editorial UAM Iztapalapa, p. 164.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México DF. Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 3, 13.

Farfán, R. (2008). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas, p. 48.

Godino y Recio. (2001). "Significados institucionales de la demostración Implicaciones para la educación matemática". *Enseñanza de las Ciencias, Vol. 19(3)*, pp. 405,406.

Gracián, E. (2012). *Los números primos un largo camino al infinito*. España: Ed. RBA. National Geographic, pp. 5-7.

Haaser, N., Sullivan J. y LaSalle J. (1976). *Análisis Matemático. Curso de Introducción. Vol. 1*. México: Trillas.

Kline, M. (1980). Matemáticas. *La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI, p. 400.

Luzzadder, W. (1988). *Fundamentos de dibujo en ingeniería*. Editorial Prentice Hall.

Monnoyeur, F. (1992). *Infini des mathematiciencs, infini des philosophes*. París: Editorial Belin, p. 52.

Pastor, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la Matemática*. Barcelona: Gedisa, p. 165, Vol. 2.

Priest, G. (2008). *An introduction to non classical logic*, segunda edición. Nueva York: Cambridge University Press.

RAE. (2014). *Diccionario de la Real Academia Española de Lengua.* España.

Rodríguez del Río. (2016). "Andrew Wiles premio Abel de las matemáticas 2016". *Boletín de la Sociedad Matemática Española, Vol. 262*, pp. 8-9.

Demostraciones matemáticas: Teoremas básicos del cálculo de una variable real, evaluación de procesos, de Víctor Manuel Ramírez Hernández y Hugo Isaías Molina Montalvo, publicado por la Universidad Autónoma de Tamaulipas y Colofón, se terminó de imprimir en marzo de 2020 en los talleres de Ultradigital Press S.A. de C.V. Centeno 195, Col. Valle del Sur, C.P. 09819, Ciudad deMéxico. El tiraje consta de 400 ejemplares impresos de forma digital en papel Couché mate de 130 gramos. El cuidado editorial estuvo a cargo del Consejo de Publicaciones UAT.